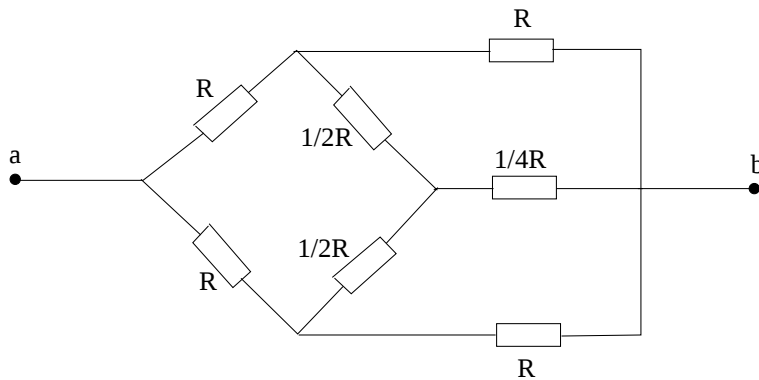


July 14, 2004

Übung 10 zur Experimentalphysik II

Aufgabe 1: Widerstandsnetzwerk

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen den Ersatzwiderstand der Schaltung in unten stehender Abbildung. b) Wie groß ist die Stromstärke in jedem Widerstand, wenn $R = 10\ \Omega$ ist und zwischen a und b eine Spannung von 80 V angelegt wird?



Aufgabe 2: Parallelschaltung von R und L

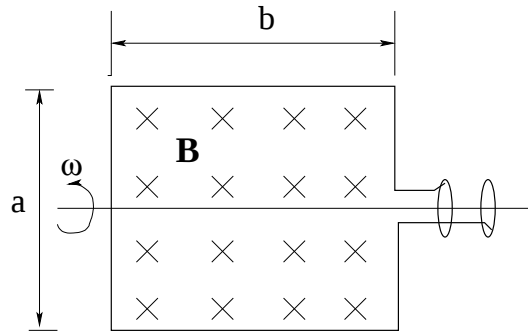
Eine Spule der Induktivität $L = 10\text{mH}$ und ein Widerstand $R = 100\ \Omega$ sind parallel an eine Wechselspannungsquelle der Amplitude $U_0 = 120\ \text{V}$ angeschlossen.

- Zeichnen Sie das Schaltbild.
- Bei welcher Kreisfrequenz ω_0 sind die Beträge der über R und L fließenden Ströme gleich?
- Berechnen Sie die Energie, die im Mittel bei $\omega = \omega_0$ in L gespeichert ist.

Aufgabe 3: Wechselstromgenerator

Der Rotor in einem Wechselstromgenerator habe die Form eines Rechtecks mit den Kantenlängen a und b und besitze N Windungen. Er sei mit Schleifringen verbunden und rotiere mit der Kreisfrequenz ω in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ (siehe Abbildung).

- Zeigen Sie, dass die Potentialdifferenz zwischen den beiden Schleifringen $U = N B a b \omega \sin \omega t$ ist.
- Mit welcher Kreisfrequenz muss die Spule rotieren, wenn $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $N = 1000$ und $B = 2 \text{ T}$ ist, damit eine maximale Induktionsspannung von 110 V entsteht?



Aufgabe 4: Impedanz

Ein Widerstand, ein Kondensator und eine Spule seien Parallel geschaltet.

- Zeichnen sie das Schaltbild.
- Berechnen Sie die Impedanz $Z(\omega)$ der drei parallel geschalteten Bauelemente.
- Berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_r , bei der die Impedanz reell wird.

Aufgabe 5: Fouriertransformation

Es sei $f(x) = A$ für $a < x < b$ und $f(x) = 0$ sonst, wobei A eine reelle konstante ist.

- Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ der Funktion $f(x)$.
- Wie kann man das Ergebnis vereinfacht schreiben, wenn die Grenzen a und b durch $-a$ und a ersetzt werden.

Lösungen zu Übung 10

Zu Aufgabe 1: Widerstandsnetzwerk

- a) Wir nehmen an, ein Strom I fließe am Punkt a in den Stromkreis hinein. Wegen der Symmetrie teilt er sich in zwei Teilströme $I/2$ auf, die durch den oberen bzw. den unteren Zweig fließen. Bei der nächsten Verzweigung teilt sich der Strom $I/2$ wiederum auf, so dass der Strom I' durch den Widerstand $\frac{1}{2}R$ fließt, während der Strom $I/2 - I'$ durch den Widerstand R fließt. Der Spannungsabfall über R muß dabei ebenso groß sein wie der über $\frac{1}{2}R$ und $\frac{1}{4}R$. Also ist $(I/2 - I')R = I'(\frac{1}{2}R) + 2I'(\frac{1}{4}R)$. Beachten Sie, dass durch $\frac{1}{4}R$ der Strom $2I'$ fließt, weil der Beiträge vom unteren und vom oberen Zweig erhält. Gleichsetzen der Potentialdifferenzen ergibt $I' = I/4$. Die Potentialdifferenz zwischen a und b ist damit $U = IR_{ers} = (I/2)R + (I/2 - I')R = I(\frac{3}{4}R)$. Daraus folgt $R_{ers} = \frac{3}{4}R$.
- b) $I = 32/3$ A. Also führen die beiden Widerstände R am Punkt a und der Widerstand $\frac{1}{4}R$ jeweils den Strom $(16/3)$ A, die anderen Widerstände führen den Strom $(8/3)$ A.

Zu Aufgabe 2: Parallelschaltung von R und L

a)

$$I_R = \frac{U}{R}; \quad I_L = \frac{U}{\omega L}$$

Da $I_R = I_L$ gelten soll folgt

$$\omega = \frac{R}{L} = 10^4 \text{ s}^{-1}$$

b)

$$\begin{aligned} \overline{W_L} &= \int_0^T W_L dt = \frac{L}{2T} \int_0^T I^2(t) dt \\ &= \frac{LI_0^2}{2T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{U_0^2}{4\omega^2 L} \end{aligned}$$

Dabei wurde $U_0 = I_0 \omega L$ benutzt.

Die mittlere gespeicherte Energie ist also $\overline{W_L} = 3,6$ mJ.

Zu Aufgabe 3: Wechselstromgenerator

- a) Es sei $\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{n}NA$. Daraus folgt $\phi_m = NBA \cos \omega t$. Damit ist die induzierte Spannung $U_{ind} = -d\phi_m/dt = NBA\omega \sin \omega t = NBab\omega \sin \omega t$
- b) Das Ergebnis von Teil a) können wir auch schreiben als $U_{ind} = U_{ind,max} \sin \omega t$, mit $U_{ind,max} = NBab\omega$. Damit die maximale induzierte Spannung gleich 110 V ist, muss für die Kreisfrequenz gelten $\omega = U_{ind,max}/(NBab) = 275 \text{ rad/s}$.

Zu Aufgabe 4: Impedanz

- a) Für die Impedanz Z gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(\omega)} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} + \frac{1}{i\omega L} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega} + i\omega C \\ &= \frac{R + i\omega L}{i\omega RL} + i\omega C \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{1}{\frac{i\omega RL}{R+i\omega L} + i\omega C} \\ &= \frac{R + i\omega L}{i\omega RC + i\omega C(R + i\omega L)} \\ &= \frac{R + i\omega L}{2i\omega RC - \omega^2 LC} \end{aligned}$$

- b) Wenn der Imaginärteil von Z gleich null ist, so verschwindet auch der Imaginärteil von $\frac{1}{Z}$. Dies ist aber genau dann der Fall wenn

$$\frac{1}{i\omega L} + i\omega C = 0,$$

also wenn

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Zu Aufgabe 5: Fouriertransformation

a)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ikx) dx \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(ikx) dx \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik} [\exp(ikb) - \exp(ika)]\end{aligned}$$

b) Wenn man im obigen Ergebnis a durch $-a$ und b durch a ersetzt, sieht man mit Hilfe der Euler'schen Formel $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = \exp(i\varphi)$:

$$\tilde{f}(k) = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ka}{k}$$

Man hätte in diesem Fall auch das Integral

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(ikx) dx$$

direkt durch

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a (\cos(kx) + i \sin(kx)) dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \cos(kx) dx = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ka}{k}$$

ersetzen können, wobei der zweite Term unter dem Integral wegfällt, da es sich bei $f(x)$ um eine symmetrische Funktion handelt.