

May 11, 2004

Übung 3 zur Experimentalphysik II

Aufgabe 1: Oberflächenintegrale I

Vorbemerkung:

Für viele typische Physikprobleme muss man Oberflächenintegrale der Form $\int \vec{E} d\vec{A}$ lösen. Dazu muss man wissen wie man für eine vorgegebene Fläche $d\vec{A}$ bildet:

$$d\vec{A} = |d\vec{A}| \vec{N}$$

Hier ist $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor zur Fläche. $\vec{N}$ kann wie folgt bestimmt werden: Eine Fläche ist mathematisch definiert durch eine Funktion $f(x, y, z) = \text{konst.}$ Beispiel: Kugeloberfläche $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r = \text{const.}$ $\vec{N}$ ergibt sich aus

$$\vec{N} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}$$

Gegeben sie ein Quadrat der Seitenlänge a :

$$f(x, y, z) = z = c, \quad x \leq a, \quad y \leq b$$

- Überlegen Sie sich am Beispiel dieser Fläche, dass $\vec{N}$ senkrecht auf der Fläche steht.
- Bestimmen sie $\vec{N}$ und $d\vec{A}$ für diese Fläche.
- Berechnen Sie für diese Fläche das Integral $\int \vec{E} d\vec{A}$ für das elektrische Feld $\vec{E} = (x, 0, 0)$

Lösung

$$\vec{N} = \frac{\vec{\nabla} f(x, y, z)}{|\vec{\nabla} f(x, y, z)|} = \frac{\vec{\nabla} z}{|\vec{\nabla} z|} = (0, 0, 1)$$

$$d\vec{A} = dy dz (0, 0, 1)$$

$$\int \vec{E} d\vec{A} = \int dy dz (x, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

Aufgabe 2: Oberflächenintegrale II

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int \vec{E} d\vec{A}$ für das Feld $\vec{E} = (0, y, 0)$ über die Fläche eines Zylinders der Länge l und des Radius r . Die Achse des Zylinders liegt entlang der z -Achse.

Lösung

Das Oberflächenelement $d\vec{A}$ hat den Betrag $r d\varphi dz$. Auf dem Zylindermantel zeigt $d\vec{A}$ immer in Richtung von r , da $d\vec{A}$ immer senkrecht auf der Oberfläche steht. Somit gilt

$$d\vec{A} = d\varphi dz \cdot (x, y, 0) = d\varphi dz \cdot (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \vec{E} d\vec{A} &= \int d\varphi dz (0, r \sin \varphi, 0) \cdot (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz \sin^2 \varphi = r^2 l \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \\ &= r^2 l \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \pi r^2 l \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Divergenz von elektrischen Feldern

Gegeben sei das elektrische Feld innerhalb und ausserhalb einer Kugel mit dem Radius R :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k\vec{r} = k(x, y, z) \quad \text{für} \quad |\vec{r}| \leq R \\ \vec{E} &= kR^3 \vec{r} / r^3 \quad \text{für} \quad |\vec{r}| > R \end{aligned}$$

- Wie groß ist die Divergenz innerhalb der Kugel?
- Bestimmen sie mit Hilfe der ersten Maxwell'schen Gleichung die räumliche Ladungsdichteverteilung $\rho(x, y, z)$.
- Argumentieren sie mit Hilfe der ersten Maxwell'schen Gleichung, dass die Divergenz des elektrischen Feldes ausserhalb der Kugel verschwindet.

Lösung

1) $\vec{E} = k\vec{\nabla}(x, y, z) = k(1 + 1 + 1) = 3k$

2) $\vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 3k \Rightarrow \rho(x, y, z) = 3\epsilon_0 k = \text{const.}$

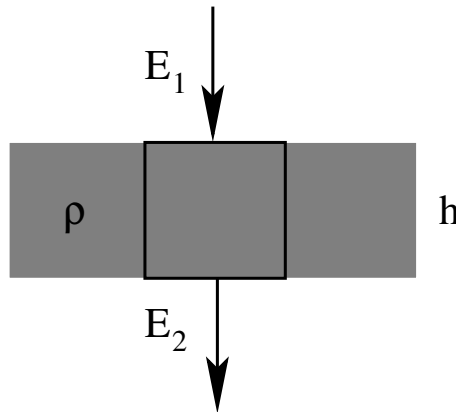
3) Ausserhalb der Kugel entspricht das Feld dem einer Punktladung im Ursprung oder einer beliebig innerhalb der Kugel verteilten Ladung. Daher können sich aber ausserhalb der Kugel keine Ladungen befinden, da diese das elektrische Feld verändern würden. Es gilt also $\rho(r) = 0$ für $r > R$. Da $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ gilt verschwindet die Divergenz von $\vec{E}$.

Aufgabe 4: Ladungsdichte und elektrisches Feld

In einem bestimmten Gebiet der Erdatmosphäre sei das elektrische Feld über der Erdoberfläche gemessen worden. In einer Höhe von 250m betrage es 150N/C und in 400m Höhe 170N/C. Das Feld weist in beiden Fällen Richtung Erde. Berechnen Sie die Raumladungsdichte der Atmosphäre unter der Annahme, sie sei zwischen 250m und 400m homogen. (Man kann die Erdkrümmung vernachlässigen. Warum?)

Lösung

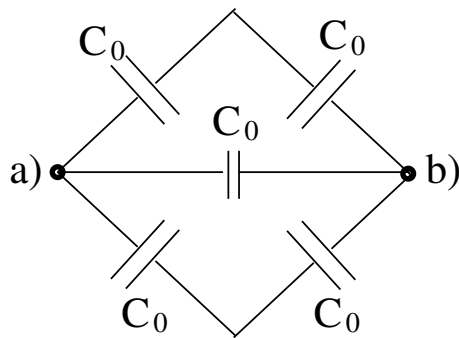
Sogar eine Höhe von 400m kann gegen den Erdradius vernachlässigt werden. Somit können wir die Erde hier als flach ansehen. Die Abbildung zeigt die Situation. Das Feld E_2 weist nach unten. Daraus folgt, dass die Ladungsdichte nahe der Erde negativ ist. Weiterhin hat E_1 einen höheren Betrag als E_2 und weist ebenfalls nach unten. Daher muss auch die Ladungsdichte negativ sein. Der elektrische Fluss durch die Gaußsche Oberfläche (siehe Abbildung) ist $\phi = (E_2 - E_1)A$. Darin ist A die Größe der Endflächen der Oberfläche. Wir wissen, dass gilt $\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho Ah}{\epsilon_0}$. Daraus folgt $\rho = \epsilon_0(E_2 - E_1)/h = -1.18 \cdot 10^{-12} \text{C/m}^3$.



Aufgabe 5: Kapazitäten

Fünf identische Kondensatoren der Kapazität C_0 seien wie in der Abbildung unten verschaltet.

- Berechnen Sie die Ersatzkapazität zwischen a und b .
- Welchen Wert hat die Ersatzkapazität, wenn zwischen a und b ein Kondensator der Kapazität $10C_0$ eingesetzt ist?



Lösung

Wir zeichnen den Schaltplan wie auf der nächsten Seite gezeigt um.

- Die dort links bzw. rechts in Reihe geschalteten Kondensatoren haben jeweils die Ersatzkapazität $\frac{1}{2}C_0$. Die gesamte Ersatzkapazität zwischen a und b ist daher $C_{ab} = 2C_0$.
- $C_{ab} = \frac{1}{2}C_0 + 10C_0 + \frac{1}{2}C_0 = 11C_0$

