

May 12, 2004

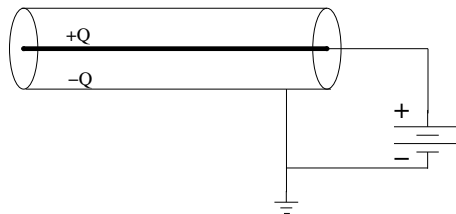
Übung 4 zur Experimentalphysik II

Aufgabe 1: Proportionalzählrohr

Proportionalzählrohre werden zum Nachweis von ionisierender Strahlung verwendet. Sie bestehen aus einem dünnen leitenden Draht mit dem Radius r_i und einem leitenden Zylinder mit dem Radius r_a (siehe Skizze). Die Länge des Zählrohres sei l . Mit einer Spannungsquelle wird eine Ladung $+Q$ auf den Draht und eine Ladung $-Q$ auf den Zylinder aufgebracht.

- Wie gross ist die Flächenladungsdichte auf dem Draht und auf dem Zylindermantel.
- Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satz das elektrische Feld im Inneren des Zählrohrs.
- Berechnen Sie den elektrischen Fluss durch einen Zylinder mit Radius r
 - durch explizite Berechnung des Integrals $\int \vec{E} d\vec{A}$.
 - mit Hilfe des Gauss'schen Satz.

Randeffekte können bei dieser Aufgabe vernachlässigt werden.



Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma_i &= \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi r_i l} \\ \sigma_i &= -\frac{Q}{A} = -\frac{Q}{2\pi r_a l} \end{aligned}$$

- b) A sei die Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius r , wobei gilt $r_i < r < r_a$. Dann gilt nach dem Gauß'schen Satz

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Das Feld kann als zylindersymmetrisch angenommen werden, d.h. $\vec{E}$ ist auf der Oberfläche des Zylinder mit Radius r konstant: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_r = \text{const.}$ Die

Richtung des E-Feldes steht senkrecht zur Zylinderoberfläche A und somit parallel zu $d\vec{A}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \vec{E} d\vec{A} = \int \vec{E}_r d\vec{A} = E_r \int dA \\ &= E_r 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

c) Explizite Berechnung von $\int \vec{E} d\vec{A}$:

$\vec{E}$ hat nur die Komponente E_r parallel zu $d\vec{A}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Phi &= \int \vec{E} d\vec{A} = \int E_r dA \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int \frac{dA}{r}\end{aligned}$$

Ein infinitesimal kleines Flächenelement auf einer Zylinderoberfläche hat die Fläche $dA = r d\varphi dz$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Phi &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{r d\varphi dz}{r} \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} 2\pi l = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

(1)

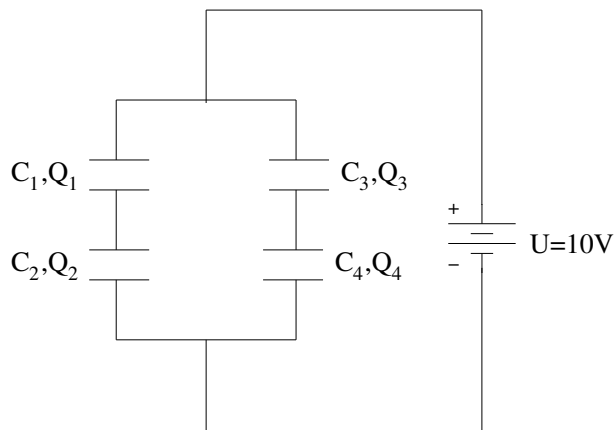
Mit Hilfe des Gauß'schen Satz:

Man stelle sich einen Zylinder der Länge l und Radius r ($r_i < r < r_a$) vor. Der Zylinder schliesst die Ladung $+Q$ auf dem Draht ein. Somit gilt nach dem Gauß'schen Satz $\Phi = +\frac{Q}{\epsilon_0}$.

Aufgabe 2: Kapazitäten

Sie haben 4 Kondensatoren mit der Kapazität $C_1 = 2 \text{ nF}$, $C_2 = 4 \text{ nF}$, $C_3 = 10 \text{ nF}$ und $C_4 = 20 \text{ nF}$. Sie sollen an eine Spannungsquelle $U=10\text{V}$ angeschlossen werden. Wie müssen die Kondensatoren verschaltet werden, dass einerseits die Gesamtkapazität grösser als 7 nF ist, andererseits der Spannungsabfall über einen einzelnen Kondensator nicht grösser als 7 V ist.

Lösung: Schaltung die die Bedingungen erfüllt:



Gesamtkapazität:

$$\begin{aligned} C_{ges} &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \\ &= \frac{2 \text{ nF} \cdot 4 \text{ nF}}{2 \text{ nF} + 4 \text{ nF}} + \frac{10 \text{ nF} \cdot 20 \text{ nF}}{10 \text{ nF} + 20 \text{ nF}} \\ &= 8 \text{ nF} \end{aligned}$$

Die Verteilung der Ladungen auf den Kapazitäten sind in der Skizze angegeben. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= \frac{Q_1}{C_1} \\ \Delta U_2 &= \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_2} \\ \Rightarrow \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} &= \frac{C_2}{C_1} = 2 \end{aligned}$$

Für C_3 und C_4 gilt dieselbe Beziehung. Mit $U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 10 \text{ V}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= \Delta U_3 = \frac{2}{3} \cdot 10 \text{ V} \\ \Delta U_2 &= \Delta U_4 = \frac{1}{3} \cdot 10 \text{ V}\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Vektorfelder

Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{r}e^{-|\vec{r}|}$ die Größe $\vec{\nabla} \vec{E}$. Lösung:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{r}e^{-|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ ye^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ ze^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Berechnung der x-Komponente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} x e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - x e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left(-\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \\ &= e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= e^{-|\vec{r}|} - \frac{x^2}{\sqrt{|\vec{r}|}} e^{-\sqrt{|\vec{r}|}}\end{aligned}$$

Die y- und z- Komponente berechnet sich genauso. Addition der 3 Terme ergibt:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) &= 3e^{-|\vec{r}|} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{|\vec{r}|}} e^{-\sqrt{|\vec{r}|}} \\ &= 3e^{-|\vec{r}|} - |\vec{r}| e^{-\sqrt{|\vec{r}|}}\end{aligned}$$