

May 20, 2004

Übung 5 zur Experimentalphysik II

Aufgabe 1: Dipol im inhomogenen $\vec{E}$ -Feld

Ein elektrischer Dipol bestehe aus zwei Ladungen $+q$ und $-q$, die einen sehr kleinen Abstand $2a$ voneinander haben. Sein Mittelpunkt liege auf der x -Achse bei $x = x_1$, und er zeige längs der x -Achse in positive x -Richtung. Der Dipol befinde sich in einem inhomogenen elektrischen Feld, das ebenfalls in die x -Richtung zeigt und durch $\vec{E} = Cx\vec{e}_x$ beschrieben wird. Darin ist C eine Konstante.

- a) Berechnen Sie die Kraft auf die positive und die Kraft auf die negative Ladung und zeigen Sie, dass die Gesamtkraft auf den Dipol $Cp\vec{e}_x$ ist, wobei p dessen Dipolmoment ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Gesamtkraft auf einen Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{p}$, das parallel zum elektrischen Feld in x -Richtung liegt, ungefähr $(dE/dx)p\vec{e}_x$ ist.

Lösung:

- a) Die positive Ladung liegt bei $x_1 + a$ und die negative bei $x_1 - a$. Auf die Ladung $+q$ wirkt die Kraft $\vec{F} = qC(x_1 + a)\vec{e}_x$ und auf die Ladung $-q$ wirkt die Kraft $\vec{F} = -qC(x_1 - a)\vec{e}_x$. Damit ist die gesamte Kraft auf das System $\vec{F}_{ges} = 2qaC\vec{e}_x = Cp\vec{e}_x$. Darin ist $p = q(2a)$ der Betrag des Dipolmoments.
- b) Wir betrachten den Fall, dass E_x eine allgemeine Funktion von x ist. Die Kraft auf $+q$ ist dann $\vec{F} = qE_x(x_1 + a)\vec{e}_x \approx q[E_x(x_1) + a(dE_x/dx)]\vec{e}_x$. Dabei ist die Ableitung von E_x an der Stelle x_1 einzusetzen. Für $-q$ ist entsprechend $\vec{F} = -qE_x(x_1 - a)\vec{e}_x \approx -q[E_x(x_1) - a(dE_x/dx)]\vec{e}_x$. Damit ist die resultierende Kraft auf das System $\vec{F}_{ges} \approx -2qa(dE/dx)\vec{e}_x = (dE_x/dx)p\vec{e}_x$. Dieser Ausdruck geht exakt in den für einen sogenannten Punkt-Dipol über, der durch drei Bedingungen definiert ist: 1) a geht gegen null, 2) q geht gegen unendlich und 3) das Produkt qa bleibt endlich.

Aufgabe 2: Linienladung

- a) Eine Linienladung endlicher Ausdehnung mit homogener Linienladungsdichte λ reiche auf der x -Achse von $x = 0$ bis $x = a$. Zeigen Sie, dass die y -Komponente eines elektrischen Feldes an einem Punkt auf der y -Achse

durch

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

gegeben ist. Hierbei ist Θ_1 der Winkel, den der Aufpunkt mit den Enden der Linienladung einschließt.

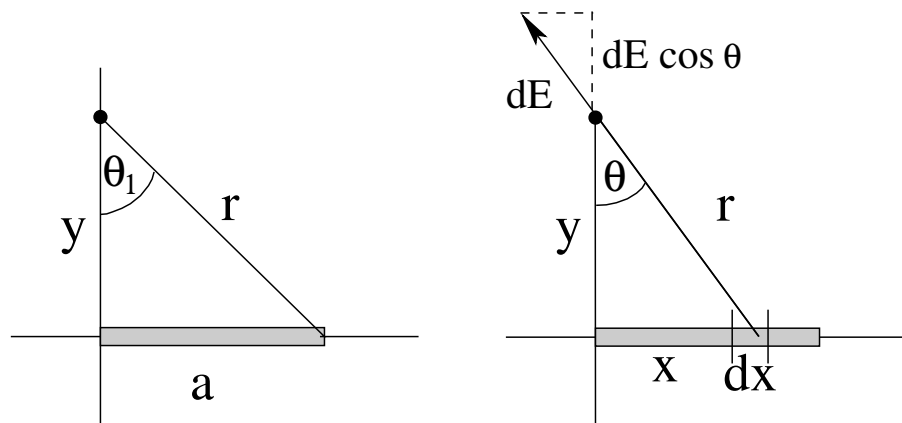
b) Zeigen Sie, dass bei der Ausdehnung der Linienladung von $x = -b$ bis $x = a$ die y -Komponente des elektrischen Feldes an einem Punkt auf der y -Achse durch

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

gegeben ist.

Lösung:

a) Die Anordnung und die verwendeten Größen sind in der Abbildung gezeigt.



Die Ladung auf einem Längenelement dx der Geraden ist $dq = \lambda dx$. Diese Ladung erzeugt ein Feld mit dem Betrag $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq/r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\lambda/r^2) dx$. Aus der Abbildung geht hervor, dass die y -Komponente dieses Feldes gegeben ist durch $dE \cos \Theta dx$. Darin ist Θ der Winkel, der dem betreffenden Längenelement zugeordnet ist.

Der Abbildung entnehmen wir außerdem, dass $x = y \tan \Theta$ ist, so dass folgt $dx = (r^2/y) d\Theta$. Kombinieren der Resultate ergibt $dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\lambda/y) \cos \Theta$ und damit, wie gefordert

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \int_0^{\Theta_1} \cos \Theta d\Theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \sin \Theta_1 .$$

b) Für diesen Fall folgt

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \int_{\Theta_2}^{\Theta_1} \cos \Theta \, d\Theta \quad (1)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} [\sin \Theta_1 - \sin(-\Theta_2)] \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} [\sin \Theta_1 + \sin \Theta_2] . \quad (3)$$

Darin ist $\sin \Theta_2 = b/(y^2 + b^2)^{1/2}$.

Aufgabe 3: Ringladung

Ein Ring mit dem Radius R trage eine homogene positive Linienladungsdichte λ . Die Abbildung zeigt einen Punkt P in der Ebene, aber nicht im Mittelpunkt des Ringes. Betrachten Sie die beiden Ringabschnitte mit den Längen s_1 und s_2 und den Abständen r_1 bzw. r_2 vom Punkt P .

a) Wie ist das Verhältnis der Ladungen dieser Abschnitte? Welche der Ladungen erzeugt ein stärkeres Feld im Punkt P ?

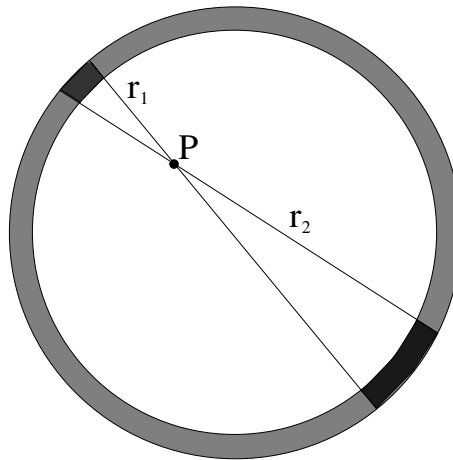
b) In welche Richtung zeigen die beiden Felder im Punkt P ? In welche Richtung weist dort das gesamte elektrische Feld?

c) Angenommen, das von einer Punktladung erzeugte elektrische Feld ändert sich mit $1/r$ statt mit $1/r^2$. Wie wäre dann das in P von den Ringabschnitten hervorgerufene elektrische Feld?

d) Wie würden sich die Ergebnisse bei a), b) und c) ändern, wenn sich P innerhalb einer homogen geladenen Kugelschale befände und s_1 sowie s_2 Flächenelemente wären?

Lösung:

a) Die Ringabschnitte tragen die Ladungen $q_1 = s_1\lambda$ und $q_2 = s_2\lambda$. Daraus folgt $q_2/q_1 = s_2/s_1$. Es gilt $s_1 = r_1\Theta$ und $s_2 = r_2\Theta$, wobei Θ der jeweilige Winkel des betreffenden Elements ist. Wir erhalten $q_2/q_1 = s_2/s_1 = r_2/r_1$. Nun ermitteln wir, welches Element das stärkere Feld erzeugt. Dazu setzen wir $E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1/r^2$ und $E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2/r^2$. Der Quotient ist $E_1/E_2 = (q_1/q_2)(r_2^2/r_1^2) = r_2/r_1 > 1$. Also ruft der Ringabschnitt s_1 das stärkere Feld



bei P hervor.

b) Jeder Abschnitt erzeugt ein Feld, das von ihm weg weist, und zwar entlang einer Geraden durch sein Mitte und durch den Punkt P . Weil s_1 das stärkere Feld hervorruft, weist das gesamte elektrische Feld von s_1 weg.

c) Hier ist $E_1/E_2 = (q_1/q_2)(r_2/r_1) = 1$. Daher heben sich die von beiden Elementen erzeugten Felder exakt auf, so dass das resultierende Feld null ist.

d) Bei einer Kugelschale ist die Ladung eines Flächenelements proportional zu dessen Fläche. Daraus folgt $q_2/q_1 = r_2^2/r_1^2$, und beide Elemente rufen am Punkt P Felder gleicher Stärke hervor, so dass dort das resultierende Feld null ist. Wenn E mit $1/r$ anstatt $1/r^2$ variierte, so erzeugte s_2 das stärkere Feld und das gesamte Feld wiese von s_2 weg.

Aufgabe 4: Potential und elektrisches Feld eines Dipols

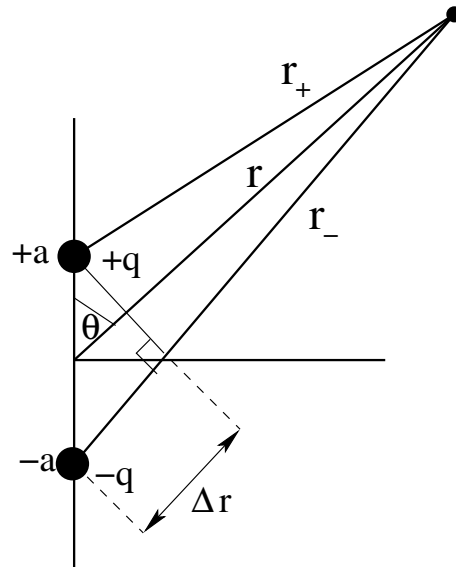
a) Zeigen Sie für den Dipol aus der Skizze, dass das Potential an einem Punkt, der vom Ursprung den großen Abstand r hat und nicht auf einer Achse liegt, angenähert durch

$$\phi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos \Theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \Theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3}$$

gegeben ist.

Hinweise: Zeigen Sie, dass $r_+^{-1} - r_-^{-1} \approx \Delta r/r^2$ ist, mit $\Delta r = r_+ - r_- \approx 2a \cos \Theta$.

b) Bestimmen Sie die x -, y -, und z -Komponenten des elektrischen Feldes an einem Punkt außerhalb der Achsen.



Lösung:

a) Das Potential dieses Systems ist $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q(1/r_+ - 1/r_-) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(r_- - r_+)/r_+r_-$. Beachten Sie, dass gilt $\vec{r}_+ = \vec{r} - a\vec{e}_z$. Daraus folgt $r_+^2 = r^2 - 2ra \cos \Theta + a^2$ bzw. $r_+ = (r^2 - 2ra \cos \Theta + a^2)^{1/2}$. Für $r \gg a$ können wir Terme wie $(a/r)^2$ und alle höheren Potenzen vernachlässigen. Damit erhalten wir $r_+ \approx r[1 - (a/r) \cos \Theta]$. Entsprechend ist $\vec{r}_- = \vec{r} + a\vec{e}_z$ und daher $r_- \approx r[1 + (a/r) \cos \Theta]$. Insgesamt folgt $r_- - r_+ = 2a \cos \Theta$ und auch $r_- r_+ \approx r^2$, wenn $(a/r)^2$ und alle höheren Potenzen vernachlässigt werden. Kombinieren der Ergebnisse liefert $\phi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q(2a \cos \Theta)/r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}pz/r^3$. Darin folgt die letzte Gleichsetzung aus $p = 2aq$ und $\cos \Theta = z/r$.

$$\begin{aligned} \text{b) } E_x &= -d\phi/dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}3px/r^5, \\ E_y &= -d\phi/dy = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}3py/r^5, \\ E_z &= -d\phi/dz = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(-p/r^3 + 3pz^2/r^5). \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Stoß von geladenen Teilchen

Ein Teilchen der Masse m mit der Ladung Q befinde sich auf der x -Achse bei $x = +a$, während sich ein zweites Teilchen gleicher Masse mit der Ladung $-Q$ auf der x -Achse bei $x = -a$ befinde. Beide werden zum Zeitpunkt $t=0$ losgelassen.

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des positiv geladenen Teilchens als Funktion seiner Position x .
- Integrieren Sie die Geschwindigkeitsgleichung, um den Zeitpunkt des Zusammenstoßes beider Teilchen zu bestimmen.

Lösung:

a) Wegen der Energieerhaltung ist $\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = 0$. Weil die Teilchen aus der Ruhe losgelassen werden, gilt für das positive Teilchen $\frac{1}{2}mv^2 = -\Delta E_{pot} = -Q\Delta\varphi$. Das von der positiven Ladung erfahrene Potential ist $\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q/r$. Wenn sich das Teilchen von $x = +a$ zu einem Punkt x bewegt, so ist die Änderung seines Potentials $\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q[1/(2x) - 1/(2a)]$. Damit ist die kinetische Energie des positiven Teilchens $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(Q^2/2)(1/x - 1/a)$.

Daraus folgt $v(x) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q/(2m)\right]^{1/2}(1/x - 1/a)^{1/2}$. Das Teilchen bewegt sich in negativer x -Richtung, und es ist $\vec{v} = -v(x)\vec{e}_x$.

b) Die Zeit T für den Stoß, also für die Bewegung des positiven Teilchens von $x = a$ nach $x = 0$, erhalten wir durch Integration von $dt = -dx/v(x)$:

$$T_0 = \int_a^0 \frac{dx}{v(x)} = \sqrt{\frac{2m}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q^2}} \int_0^a \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a-x}}.$$

Zum Vereinfachen des Integrals setzen wir $y = (\frac{x}{a})^{1/2}$ und erhalten

$$T_0 = 2a^{3/2} \sqrt{\frac{2m}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q^2}} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Mit $y = \sin \vartheta$ folgt

$$T_0 = 2a^{3/2} \sqrt{\frac{2m}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q^2}} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta d\vartheta.$$

Dies ergibt

$$T = \sqrt{\frac{2m}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q^2}} \frac{\pi}{2} a^{3/2}.$$

Aufgabe 6: Plattenkondensator I

Auf einen Plattenkondensator mit der Fläche A je Platte und dem Plattenabstand x werde die Ladung Q aufgebracht. Anschließend werde der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt.

- Berechnen Sie die gespeicherte Energie als Funktion des Abstandes x .
- Wie groß ist die Energiedifferenz dW wenn man die Platten um die Strecke dx auseinanderzieht? Verwenden Sie $dW = (dW/dx)dx$.
- Übt eine Platte auf die andere die Kraft F aus, so benötigt man die Energie $dW = F dx$, um eine Platte um dx zu bewegen. Zeigen Sie, dass gilt $F = Q^2/(2\epsilon_0 A)$.
- Zeigen Sie, dass die Kraft aus Teil c) gleich $\frac{1}{2}Eq$ ist, wobei Q die Ladung auf einer Platte und E die zwischen den Platten herrschende Feldstärke ist. Woher kommt der Faktor $\frac{1}{2}$?

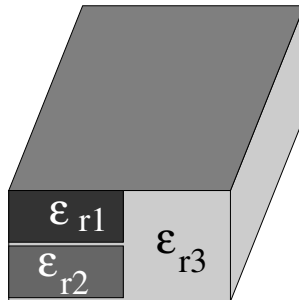
Lösung:

- Die gespeicherte Energie ist $W = \frac{1}{2}CU^2$. Wenn sich der Abstand x ändert, so gilt $C = \epsilon_0 A/x$ und $U = Ex$. Daraus folgt $W(x) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 A/x)(Ex)^2 = \epsilon_0 A E^2 x/2$. Wegen $E = \sigma/\epsilon_0$ erhalten wir $W(x) = \sigma^2 A x/(2\epsilon_0)$.
- Aus $dW/dx = \sigma^2 A/(2\epsilon_0)$ folgt $dW = [\sigma^2 A/(2\epsilon_0)] dx$.
- Mit $Q = \sigma A$ ergibt sich aus dem Ergebnis von Teil b) die Kraft zu $F = \sigma^2 A/(2\epsilon_0) = Q^2/(2\epsilon_0 A)$.
- Das elektrische Feld zwischen den Platten ist $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0 A)$. Daraus folgt $F = \frac{1}{2}EQ$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, dass E das elektrische Feld beider Platten gemeinsam ist. Jede Platte ruft das Feld $\frac{1}{2}E$ hervor, das das externe Feld für die jeweils andere Platte ist, und die Kraft ist das Produkt aus der Ladung und dem auf sie einwirkenden externen Feld.

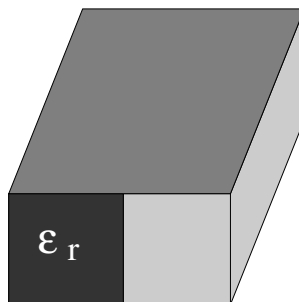
Aufgabe 7: Plattenkondensator II

Teil 1: Welche Kapazität hat folgender Plattenkondensator?

Teil 2: Ein Plattenkondensator (siehe Skizze unten) mit der Fläche A und dem Plattenabstand d werde auf die Spannung U aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt. Eine Platte mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 2$, der Dicke d und der Grundfläche $\frac{1}{2}A$ werde jetzt in den Kondensator eingeschoben. Es sei σ_1 die freie Ladungsdichte auf der Grenzfläche Leiter–Dielektrikum und σ_2 die freie Ladungsdichte auf der Grenzfläche Leiter–Luft.



- Weshalb muß das elektrische Feld im Dielektrikum und im freien Plattenzwischenraum den gleichen Wert haben?
- Zeigen Sie, dass $\sigma_1 = 2\sigma_2$ ist.
- Zeigen Sie, dass die neue Kapazität den Wert $3\epsilon_0 A/2d$ und die neue Spannung den Wert $\frac{2}{3}U$ hat.



Lösung:

Teil 1: Diesen Kondensator können wir als Kombination von drei Kondensatoren ansehen, die jeweils die Fläche $A/2$ haben. Die Kondensatoren mit den Dielektrizitätszahlen ϵ_{r1} und ϵ_{r2} haben den Plattenabstand $d/2$ und sind in Reihe geschaltet. Parallel zu ihnen liegt der Kondensator mit der Dielektrizitätszahl ϵ_{r3} und dem Plattenabstand d . Also ist $C_{ers} = C_3 + C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$, wobei gilt $C_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 (A/2) / (d/2)$ und $C_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 (A/2) / (d/2)$ sowie $C_3 = \epsilon_{r3} \epsilon_0 (A/2) / d$. Einsetzen ergibt $C_{ers} = (\epsilon_0 A / d) \left[\frac{1}{2} \epsilon_{r3} + \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} / (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \right]$.

Teil 2: a) Die Platten der Kondensatoren sind Leiter und daher Äquipotentialflächen. Deswegen muss die Potentialdifferenz zwischen den Platten überall gleich sein: dort, wo sich das Dielektrikum befindet und dort, wo sich keines

befindet. Die Potentialdifferenz ist $U = Ed$, wobei d der Plattenabstand ist. Er ist in den Gebieten mit und ohne Dielektrikum derselbe. Somit ist E in beiden Fällen gleich.

b) Nahe der Oberfläche eines geladenen Leiters ist das Feld $E = \sigma/(\epsilon_r \epsilon_0)$. Daraus folgt $\sigma = E \epsilon_r \epsilon_0$. Weil E in den Bereichen mit und ohne Dielektrikum dasselbe ist, gilt $\sigma_1 = E \epsilon_r \epsilon_0$ und $\sigma_2 = E \epsilon_0$. Mit $\epsilon_r = 2$ erhalten wir $\sigma_1 = 2\sigma_2$.

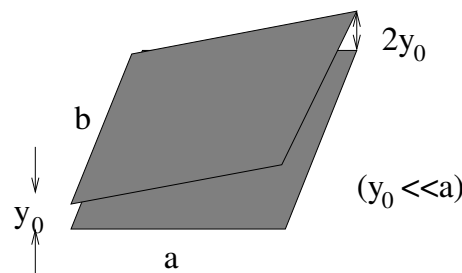
c) Die neue Kapazität ist $C_e = C_1 + C_2$, mit $C_1 = \epsilon_r \epsilon_0 (A/2)/d$ und $C_2 = \epsilon_0 (A/2)/d$. Mit $\epsilon_r = 2$ erhalten wir $C_e = 3\epsilon_0 A/(2d) = \frac{3}{2}C_a$. Darin ist $C_a = \epsilon_0 A/d$. Die Anfangsladung $Q = C_a U_a$ bleibt gleich, weil der Kondensator mit keiner Ladungsquelle verbunden ist. Also ist jetzt $U_e = Q/C_e = C_a U_a / (\frac{3}{2}C_a) = \frac{2}{3}U_a$.

Aufgabe 8: Kapazität zweier geneigten Platten

Ein Kondensator habe rechteckige Platten der Länge a und der Breite b . Die obere Platte sei gegen die untere leicht geneigt, wie in der Abbildung gezeigt.

Berechnen Sie die Kapazität, indem Sie Streifen der Breite dx und der Länge b betrachten, um damit parallelgeschaltete differentielle Kondensatoren mit der Fläche $b dx$ und dem Abstand $s = y_0 + (y_0/a)x$ anzunähern.

Lösung:



Jede differentielle Kapazität hat die Form $C = \epsilon_0 A/s$. Hierbei ist $A = b dx$ und $s = y_0(1 + x/a) = (y_0/a)(a + x)$. Es folgt $dC = [\epsilon_0 ab / (y_0(a + x))] dx$. Diese differentiellen Kapazitäten liegen parallel, so dass die Gesamtkapazität gleich ihrer Summe bzw. gleich dem Integral ist:

$$C = \frac{\epsilon_0 ab}{y_0} \int_0^a \frac{dx}{x + a} = \frac{\epsilon_0 ab \ln 2}{y_0}.$$