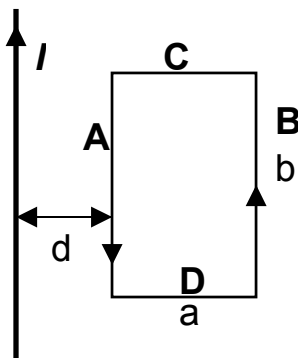
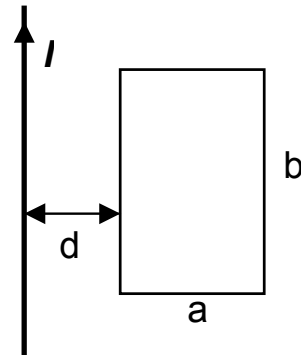


Kraft stromführender Leiter

Ein langer gerader Draht werde von einem Strom der Stärke 20A durchflossen. Eine rechteckige Spule mit Seiten der Länge 5cm und 10cm und dem Abstand 2cm vom Draht führe einen Strom der Stärke 5A. Bestimmen Sie die Kraft, die das Magnetfeld des Drahtes auf jeden Abschnitt des rechteckigen Leiterstückes ausübt.



Die Kraft, die das Magnetfeld $\vec{B}_1$ auf den Strom I_2 ausübt:

$$I_2 \Delta \vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \vec{F}_2$$

Das Magnetfeld ist $|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r}$, wobei r der Abstand zum Draht ist.

Es werden nun die einzelnen Drahtstücke betrachtet.

$$A: F_A = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} I_2 l = 1 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$B: F_B = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} I_2 l = 0.286 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Für C und D variiert das Magnetfeld in Stromrichtung. Berechne ein Kraftelement dF_C und integriere über die Länge:

$$C: dF_C = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad F_C = \int_2^7 \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{7}{2}\right) = 0.251 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$D: F_C = -F_D$$

Die gesamte Kraft wirkt nach rechts und hat den Betrag $F = 0.714 \cdot 10^{-4} \text{ N}$

Magnetfeld einer Leiterschleife

Eine stromführende ringförmige Leiterschleife mit dem Radius 10cm erzeuge in ihrem Mittelpunkt ein Magnetfeld, das gerade so stark sei, dass es das Erdmagnetfeld am Äquator kompensiert. Dieses hat dort eine Stärke von 0.7 G und zeigt nach Norden. Berechnen Sie die notwendige Stromstärke und skizzieren Sie die Anordnung.

Verwende das Bio-Savart'sches Gesetz:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^2}}{r^2}$$

R :=Radius, $\sin \theta$:= Winkel zwischen $I d\vec{l}$ und $\vec{r}$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{R^2} \Rightarrow B = \oint_{\text{Schleife}} dB = \oint_{\text{Schleife}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{R^2}$$

$\sin \theta = 1$, da $I d\vec{l}$ und $\vec{r}$ senkrecht sind.

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2R} \text{ mit } B = 0.7 \cdot 10^{-4} T, R = 0.1m \text{ folgt } I = 11.1A$$

Für die Richtung muss die Rechte-Hand-Regel verwendet werden.

Ampère'sches Gesetz

- I. Betrachten Sie einen langen geraden Zylinder mit dem Radius a , der von einem Strom der Stärke I durchflossen wird. Wie groß ist das Magnetfeld in Abhängigkeit vom Achsenabstand r innerhalb und außerhalb des Drahtes? Nehmen Sie an, dass der Strom gleichmäßig über den Leiter verteilt ist.
- II. Ein unendlich ausgedehntes Leiterblech werde von einem Strom durchflossen, wobei I der Strom pro Längeneinheit ist. Wie groß ist das Magnetfeld?

I Die Magnetfeldlinien außerhalb des Zylinders für Bahnen der Länge L sind Kreise.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_L d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 I_{\text{Gesamt}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{\text{Gesamt}}}{2\pi r}$$

Das Magnetfeld verhält sich so, als würde der Strom entlang der Achse fließen.

Wenn $r < a$ ist, spielt die Stromverteilung eine Rolle:

i) Ist das Material ein Metall, so fließt der Strom an der Oberfläche und es ergibt sich

$$B 2\pi r = 0 \text{ bzw } B = 0$$

ii) Ist der Strom gleichmäßig über den Leiter verteilt $I(r) = \frac{I_{\text{Gesamt}} r^2}{a^2}$

$$B = \frac{\mu_0 I_{\text{Gesamt}} r}{2\pi a^2}$$

II Das Magnetfeld senkrecht zum Strom ist parallel zum Blech. Man betrachte einen geschlossen Weg in Form eines Rechtecks der Länge x , wobei der Strom aus der Ebene herausfließt und wende das Ampère'sche Gesetz an:

$$\oint_{\text{Rechteck}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{Gesamt}}$$

Die Teilstücken des Rechtecks, die durch das Blech gehen, tragen nicht zum Integral bei.

$$\oint_{\text{Rechteck}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bx + 0 + Bx + 0 = 2Bx$$

$$I_{\text{Gesamt}} = Ix$$

$$\Rightarrow 2Bx = \mu_0 Ix \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 I$$

Stoke'scher Satz

Verifizieren Sie den Stoke'schen Satz für ein Vektorfeld $\vec{A} = (2x - y)\vec{e}_x - yz^2\vec{e}_y - y^2z\vec{e}_z$, wobei S die obere Hälfte der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist und C den Rand darstellt.

Der Stoke'sches Satz ist

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds$$

Der Rand C von S ist der Kreis R mit $x^2 + y^2 = 1$. Eine Parameterdarstellung von C ist $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$ mit $0 < t < 2\pi$. Für das Linienintegral ergibt sich:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C (2x - y)dx - yz^2 dy - y^2 z dz = \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t) \frac{d}{dt} x(t) dt = \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t)(-\sin t) dt = \pi$$

Für das Oberflächenintegral ergibt sich mit

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \vec{e}_z \quad \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \iint_S \vec{e}_z \cdot \vec{n} ds$$

Integration über die obere Halbkugel S des Skalarproduktes des Einheitsvektors in z-Richtung und der Normalen auf die Kugel ist gleich einer Integration der Projektion der Kugel in die xy Ebene. =>

$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \iint_S \vec{e}_z \cdot \vec{n} ds = \iint_R dx dy = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = 4 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = 4 \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi$$