

June 16, 2004

Übung 8 zur Experimentalphysik II

Aufgabe 1: Das Magnetfeld einer Spule

Berechnen sie das Magnetfeld im Mittelpunkt einer Zylinderspule der Länge l . Nehmen Sie hierzu an, dass die Spule N Wicklungen hat, die auf einem Zylinder mit dem Radius R und der Länge l angeordnet ist.

Wählen sie das Koordinatensystem so, dass die Mittelachse des Zylinders mit der x -Achse zusammenfällt und der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Spule liegt.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst das Magnetfeld, das von einer Leiterschleife auf einem Punkt auf seiner Mittelachse im Abstand R vom Mittelpunkt der Leiterschleife entfernt erzeugt wird. Benutzen Sie hierzu das Gesetz von Biot-Savart.

Benutzen Sie das Ergebnis um das gesamte Magnetfeld der Spule aufzuintegrieren. Hierzu benötigen Sie das Integral

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Aufgabe 2: Geladene Teilchen in homogenen Magnetfeldern

Wasserstoffkerne (Masse m_p , Ladung $+e$), Deuteriumkerne (Masse $m_D = 2m_p$, Ladung e) und Alphateilchen (Masse $m_\alpha = 4m_p$, Ladung $2e$) treten mit der gleichen kinetischen Energie in ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ ein, das senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor stehe. Die Bahnradien werden mit r_p , r_D und r_α bezeichnet. Bestimmen sie r_D/r_p und r_α/r_p .

Aufgabe 3: Magnetfeld eines Leiters mit Bohrung

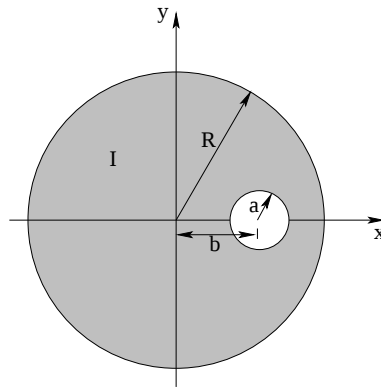
Ein sehr langer gerader Leiter mit kreisförmigen Querschnitt und Radius R werde vom Strom I durchflossen. Im Innern des Leiters befinde sich eine zylindrische Bohrung mit Radius a , deren Achse parallel zur Leiterachse verläuft und von dieser den Abstand b hat (siehe Abbildung nächste

Seite) .Die Leiterachse sei die z -Achse, und die Achse der Bohrung befinde sich bei $x = b$. Bestimmen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$:

a) auf der x -Achse bei $x = 2R$ und

b) auf der y -Achse bei $y = 2R$.

Hinweis: Stellen Sie sich die Anordnung vor als Kombination eines Stromes mit homogener Stromdichte über dem Zylinderquerschnitt und mit einer Stromdichte gleicher Stärke, aber entgegengesetzter Richtung in der Bohrung.



Aufgabe 4: Stoke'scher Satz I

Zeigen Sie die Gültigkeit des Gaußschen Satz für das Vektorfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{pmatrix}$$

auf der Fläche, die durch

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

und die Ebene $x_3 = 2$ begrenzt wird.

Hinweis: Zur Berechnung des Linienintegrals: Überlegen Sie sich die Darstellung $\vec{r}(x_1)$ der Randkurve C und berechnen sie $d\vec{r}$. Welches geometrisches Objekt beschreibt die Kurve? Parametrisieren sie $\vec{F}$ und $\vec{r}$ in Polarkoordinaten und berechnen Sie das Kurvenintegral.

Zur Berechnung des Flächenintegrals: Berechnen sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ und $dA \vec{n} =$

$(\partial \vec{r} / \partial x_1 \times \partial \vec{r} / \partial x_2) dx_1 dx_2$. Schreiben Sie das Flächenintegral nun in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 5: Stoke'scher Satz II

Verifiziere den Satz von Stokes fuer

$$\vec{A} = (2x - y)\vec{e}_x - yz^2\vec{e}_y - y^2z\vec{e}_z,$$

wobei S die Kreisscheibe ist, die durch $x^2 + y^2 = 1$ beschrieben wird, und C den Rand von S darstellt.

Aufgabe 6: Zyklotron

In einem Zyklotron zur Beschleunigung von Protonen, das einen Radius von 0,7 m habe, herrsche ein Magnetfeld von 1,4 T. In den Lücken zwischen den D's werden die Protonen durch eine angelegte Spannung von 20 kV beschleunigt.

- a) Berechnen Sie die Zyklotronfrequenz.
- b) Wieviel Energie gewinnen die Protonen bei einem Umlauf?
- c) Welche Maximalenergie haben die Protonen beim Austritt aus dem Zyklotron?

Lösungen

Zu Aufgabe 1: Das Magnetfeld einer Spule

Das Magnetfeld einer Spule ist im wesentlichen das Feld von N hintereinander angeordneten kreisförmigen Leiterschleifen. Zunächst wird das Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife das auf einem Punkt P erzeugt wird, der auf seiner Mittelachse liegt (siehe obere Skizze auf der nächsten Seite). Nach dem Gesetz von Biot-Savart ist das Magnetfeld, das von dem Strom I durch das Leiterstück dl erzeugt wird gleich

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{x^2 + R^2}$$

Dabei wird ausgenutzt, dass in einer kreisförmigen Leiterschleife der Strom I immer senkrecht auf dem Vektor $\vec{r}$ steht der zum Punkt P zeigt. Für die gesamte Feldstärke ist aus Symmetriegründen klar, dass nur die Komponente entlang der Mittelachse B_x ungleich null ist. Man erhält sie durch Integration über alle Stromelemente, also die vollständige Leiterschleife. Dabei wird die Komponente entlang der Mittelachse durch Multiplikation mit dem Winkel $\sin \vartheta$ herausprojiziert.

$$B_x = \int dB_x = \int dB \sin \vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Die Größen x und R können vor das Integral gezogen werden, da sie nicht von dl abhängen. Daher ergibt sich

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Nun wird das Magnetfeld am Ursprung bestimmt. In der unteren Abbildung auf der nächsten Seite ist die Geometrie des Problems gezeigt. Mit der Windungszahldichte $n = N/l$ ist im Abschnitt dx die Zahl der Windungen gleich ndx . Sie werden vom Strom I durchflossen. Dieser Abschnitt entspricht daher einer einzelnen kreisförmigen Leiterschleife, in der der Strom $di = nI dx$ fließt.

Das Feld was vom diesem Spulenstück dx im Ursprung erzeugt wird ist nach der oben durchgeführten Rechnung durch

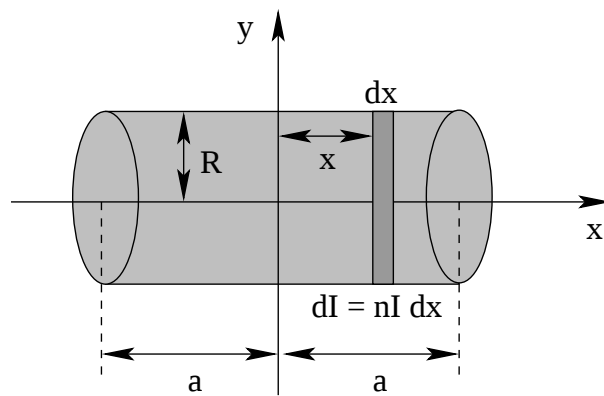
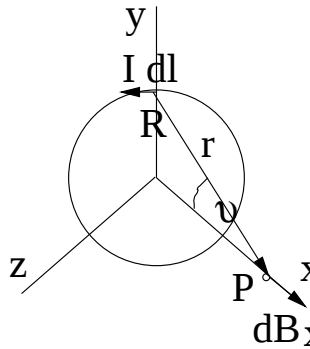
$$dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{nIR^2 dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben. Das gesamte Magnetfeld erhält man durch Integration dieses Ausdrucks von $x = -a$ bis $x = a$:

$$B_x = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu_0 n I \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

Falls $a \gg R$ ist geht dieser Ausdruck über in

$$B_x = \mu_0 n I.$$



Zu Aufgabe 2: Geladene Teilchen in homogenen Magnetfeldern

Der Bahnradius ergibt sich durch Gleichsetzen von Lorentz-Kraft und elektrischer Kraft zu $r = mv/(qB) = (2E_{kin}m)^{1/2}/(qB)$. Daher ist für konstante kinetische Energie der Radius proportional zu $m^{1/2}$ und umgekehrt proportional zu q . Daraus folgt $r_D/r_p = (m_D/m_p)^{1/2}(q_p/q_D) = \sqrt{2}$ und $r_\alpha/r_p = (m_\alpha/m_p)^{1/2}(q_p/q_\alpha) = 1$.

Zu Aufgabe 3: Zum Magnetfeld eines Leiters mit Bohrung

Wir können das System ansehen als Überlagerung eines Leiters mit dem Radius R , der den Strom I' in positiver z -Richtung führt, und einem dünneren Leiter mit dem Radius a , der den Strom I'' in negativer z -Richtung führt. Dabei gilt die Bedingung, daß beide Leiter dieselbe Stromdichte, also den gleichen Strom pro Flächeneinheit führen. Den gesamten Strom in z -Richtung bezeichnen wir mit I . Die Stromdichte j ist $I = j(\pi R^2 - \pi a^2) = j\pi(R^2 - a^2)$. Daraus folgt $I' = j\pi R^2 = IR^2/(R^2 - a^2)$ und $I'' = j\pi a^2 = Ia^2/(R^2 - a^2)$.

a) An einem Punkt auf der x -Achse bei $x = 2R$ erzeugt der dickere Leiter ein Feld in $\vec{e}_y$ und der dünnere Leiter erzeugt ein Feld in $-\vec{e}_y$ -Richtung. Das Feld im Abstand r von einem geraden Leiter, der den Strom I führt, ist $\mu_0 I/(2\pi r)$. Im vorliegenden Fall ist $\vec{B} = \mu_0 I/(2\pi) (I'/(2R) - I''/(2R - b)) \vec{e}_y$.

Daraus folgt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R^2 - a^2)} \left(\frac{R}{2} - \frac{a^2}{2R - b} \right) \vec{e}_y$$

b) An einem Punkt auf der y -Achse bei $y=2R$ müssen wir zwei Felder betrachten. Ihre Beträge sind $B' = \mu_0 I'/(4\pi R)$, und $B'' = \mu_0 I''/(2\pi r)$. Hier bei ist $r = (b^2 + 4R^2)^{1/2}$. Das Feld B' liegt in $-\vec{e}_x$ -Richtung, und B'' ist gegen die positive x -Richtung nach unten geneigt. Insbesondere ist $B''_x = B'' \cos \theta = B''(2R/r)$ und $B''_y = -B'' \sin \theta = -B''(b/r)$. Also ist am betrachteten Punkt

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R^2 - a^2)} \left(\frac{a^2 R}{b^2 + 4R^2} - \frac{R}{4} \right)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R^2 - a^2)} \frac{a^2 b}{b^2 + 4R^2}$$

Zu Aufgabe 4: Stoke'scher Satz I

Berechnung des Linienintegrals: Die Randkurve C hat die Form $4 = x_1^2 + x_2^2$. Sie stellt einen Kreis in der $x_3 = 2$ Ebene dar. Damit ergibt sich

$$\vec{r}(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \pm \sqrt{4 - x_1^2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r}(x_1) = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \mp \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{4 - x_1^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

C stellt einen Kreis in der $x_3 = 2$ Ebene dar. Durch das $\pm$ werden der positive und der negative Halbkreis berücksichtigt. In Polarkoordinaten gilt auf der Kurve $x_1 = 2 \cos \varphi$ und $x_2 = 2 \sin \varphi$ und damit

$$\vec{r}(x_1) = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r}(x_1) = \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi d\varphi \\ 2 \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit hat das Linienintegral die Form

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi (-12 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) = -20\pi$$

Berechnung des Flächenintegrals:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 3x_2 & -x_1 x_3 & x_2 x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3^2 \\ 0 \\ -3 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$dA \vec{n} = (\partial \vec{r} / \partial x_1 \times \partial \vec{r} / \partial x_2) dx_1 dx_2 = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle: *Oben* ist bei unserer Fläche die Innenseite der Schale. Tatsächlich zeigt $\vec{n}$ in die richtige Richtung (die Komponente in Richtung $\vec{e}_3$ ist positiv)! Weiter ergibt sich

$$dA \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (-x_1 x_3^2 - x_1^2 - x_3 - 3) dx_1 dx_2.$$

Das daraus folgende Oberflächenintegral ermittelt man am günstigsten in Zylinderkoordinaten,

$$x_1 = \rho \cos \varphi$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi$$

$$x_3 = x_3$$

Die Fläche hat in diesem Koordinatensystem die Form $x_3 = \rho^2$, und damit lautet das Integral

$$\int_{\rho=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\rho d\varphi \rho \left(-\frac{\rho^4}{4} \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi - \frac{\rho^2}{2} - 3 \right) = -20\pi .$$

also der gleiche Wert wie für das Linienintegral.

Zu Aufgabe 5: Stoke'scher Satz II

Der Rand C von S ist der Kreis in der xy -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1. Es sei $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ die Parameterdarstellung von C . Dann folgt

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C (2x-y) dx - yz^2 dy - y^2 z dz = \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t)(-\sin t) dt = \pi$$

Wegen

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \vec{k}$$

ergibt sich

$$\int \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \int \int_S \vec{k} \cdot \vec{n} dS .$$

Der Einheitsvektor $\vec{n}$ auf der Kreisscheibe in der $x-y$ -Ebene ist aber gerade gleich $\vec{k}$, es gilt daher $\vec{k} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$. Somit erhält man für das Integral

$$\int \int_S \vec{k} \cdot \vec{n} dS = \int \int_S dS = \pi ,$$

da S ein Kreis mit dem Radius 1 ist.

Zu Aufgabe 6: Zyklotron

a) Durch Gleichsetzen von Lorentzkraft und Zentrifugalkraft erhält man

$$r = \frac{mv}{qB} .$$

Die Zeit T , die das Teilchen für einen Umlauf benötigt ist mit der Teilchengeschwindigkeit v verbunden durch

$$T = \frac{2\pi r}{v} .$$

Damit folgt für die Zyklotronfrequenz

$$\nu = qB / (2\pi m) .$$

Sie hängt also nicht von der Energie des Teilchens ab. Für die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte ergibt sich eine Frequenz von $2,13 \cdot 10^7$ Hz.

b) Der Energiegewinn pro Umlauf im Zyklotron ist $E = 2q_p U = 40$ keV, da die Potentialdifferenz zweimal durchlaufen wird.

c) Wegen $r = mv/(qB)$ ist die kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = (rqB)^2/(2m) = 46$ MeV.