

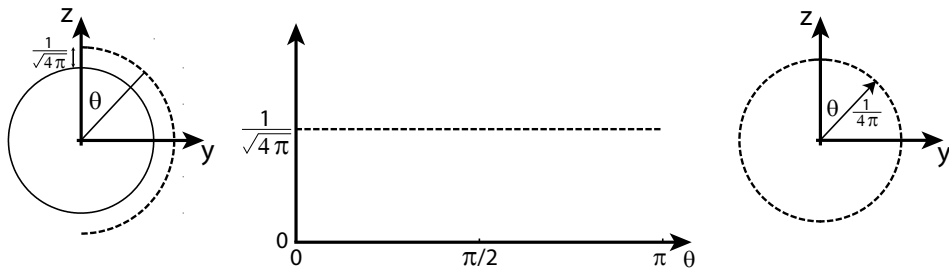
Physik IV (SS2011)

2. Übungsblatt

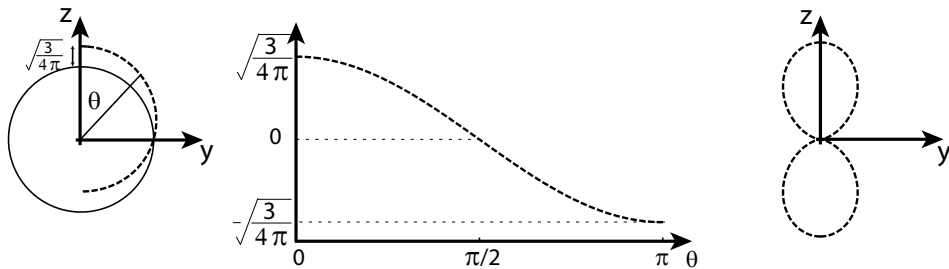
1 Kugelflächenfunktionen

Skizzieren Sie die Kugelflächenfunktionen Y_1^0 und Y_3^0 auf einer senkrecht zum Äquator geschnittenen Kugeloberfläche, entlang diesen Schnitte und deren Betragsquadrat in Polarkoordinaten.

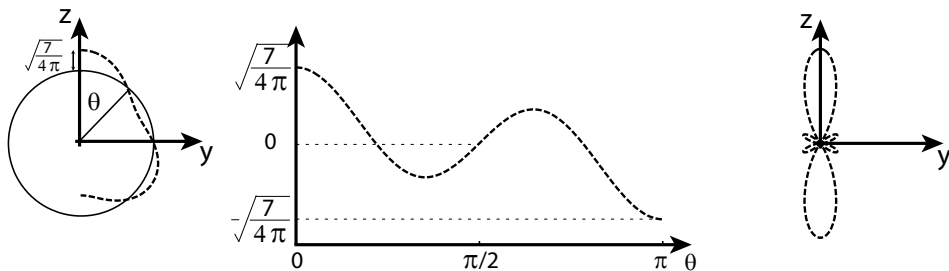
Beispiel für $Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$:



$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$:

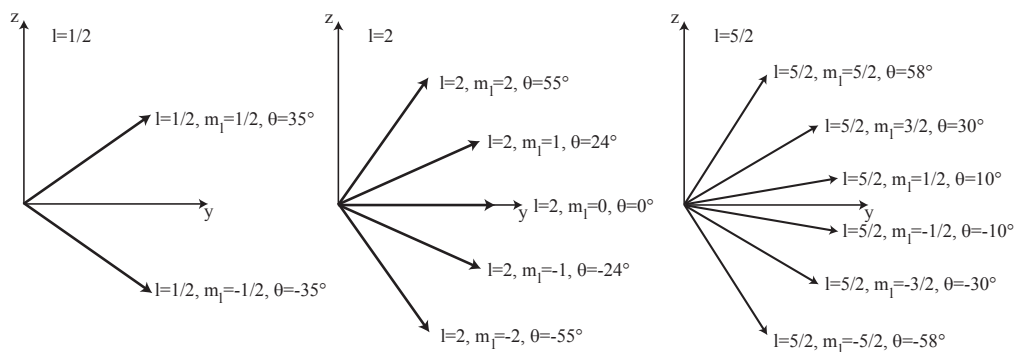


$Y_3^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta))$:



2 Drehimpuls - Vektordarstellung

Zeichnen Sie die Drehimpulse mit den Quantenzahlen $l=1/2, 2$ und $5/2$ mit ihren m_l als Vektoren in ein y-z-Koordinatensystem. Die Quantisierungsachse sei durch die z-Achse gegeben. Geben Sie für jeden Vektor den mit der y-Achse eingeschlossenen Winkel an.



3 Drehimpuls im Bohrschen Atommodell

Leiten Sie ausgehend von der Quantisierung der Umlaufbahn des Elektrons im Bohrschen Atommodell dessen Bahndrehimpuls her. Um welche Komponent(en) des Drehimpulses handelt es sich hier? Geben Sie den Betrag des Grundzustanddrehimpulses an.

Mit der Quantisierungsbedingung, dass der Umfang des Kreises auf dem sich das Elektron bewegt ein Vielfaches der de-Broglie Wellenlänge sein muss, folgt:

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mv} \quad (1)$$

Damit ergibt sich für die z-Komponente des Drehimpulses:

$$m_l = pr = mvr = n \frac{h}{2\pi}. \quad (2)$$

Für den Betrag des Grundzustanddrehimpulses ergibt sich mit $l = m_l$:

$$L^2 = l(l+1)\hbar \quad (3)$$

$$L = \sqrt{2}\hbar \quad (4)$$

4 Quantisierung durch Randbedingung

- (a) In der Vorlesung wurde mit Hilfe einer Potenzreihe die Quantisierung des Betragsquadrats des Drehimpulses aus dessen Differentialgleichung hergeleitet. Lösen Sie analog hierzu die stationäre Schrödinger Gleichung des harmonischen Oszillators:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (5)$$

und berechnen Sie mit Hilfe der erhaltenen Quantisierung das Energiespektrum.

Tipp: Anstatt einer Potenzreihe $\Psi(x) = P(x)$ bietet es sich an $\Psi(x) = P(x)e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}$ anzusetzen und λ geschickt zu wählen.

- (b) Skizzieren Sie die Eigenenergien in einem harmonischen Potential.
- (c) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle x(t) \rangle$ für einen Zustand der zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Superposition des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustand ist $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ($\langle x|0\rangle = \Psi_0(x) = \frac{\lambda^{1/4}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}$, $\langle x|1\rangle = \Psi_1(x) = \frac{2^{1/2} \lambda^{3/4}}{\pi^{1/4}} x e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}$). Und zeigen Sie, dass der Erwartungswert mit der gleichen Frequenz oszilliert wie dies für die Position eines klassischen Teilchens zu erwarten wäre.

Tipp: Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ist Null, falls es sich bei $f(x)$ um eine ungerade Funktion handelt.

- (a) Mit $\lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$ und $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ vereinfacht sich die Schrödinger Gleichung zu:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2 x^2 + k^2 \right] \Psi(x) = 0 \quad (6)$$

Einsetzen von $\Psi(x) = P(x)e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}$ und kürzen von $e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}$ führt dann zu:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x) - 2\lambda x \frac{\partial}{\partial x} P(x) - \lambda P(x) + \lambda^2 x^2 P(x) - \lambda^2 x^2 P(x) + k^2 P(x) = 0 \quad (7)$$

Mit $P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ ergibt sich:

$$\sum_{j=2}^{\infty} a_j j(j-1) x^{j-2} - 2\lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_j j x^j - \lambda \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + k^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0 \quad (8)$$

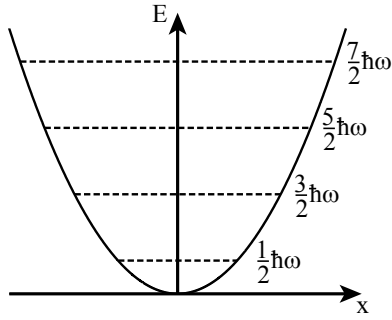
Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$a_{j+2} = \frac{\lambda(2j+1) - k^2}{(j+2)(j+1)} \quad (9)$$

Die Wellenfunktion $\Psi(x)$ ist nur normierbar, wenn die Potenzreihe abbricht (Streng genommen müsste man hier zeigen, dass die Potenzreihe schneller als die abfallende Exponentialfunktion anwächst, falls die Potenzreihe nicht abbricht). Dafür muss der Zähler in der Rekursionformel für ein j Null sein, was zu den Eigenenergien führt:

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \lambda(2j+1) = \frac{2j+1}{2} \hbar\omega. \quad (10)$$

(b)



(c)

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} |0\rangle + e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} |1\rangle) \quad (11)$$

$$\langle x(t) \rangle = \langle \Psi(t) | x | \Psi(t) \rangle \quad (12)$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{2}(\langle 0|x|0\rangle + e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t} \langle 0|x|1\rangle + e^{i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t} \langle 1|x|0\rangle + \langle 1|x|1\rangle) \quad (13)$$

Mit $E_1 - E_0 = \hbar\omega$ und $\langle 0|x|0\rangle = \langle 1|x|1\rangle = 0$ ($\langle x|0\rangle$ und $\langle x|1\rangle$ sind gerade bzw. ungerade Funktionen) folgt:

$$\langle x(t) \rangle = \cos(\omega t) \langle 1|x|0\rangle. \quad (14)$$

Mit

$$\langle 1|x|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x)x\Psi_0(x)dx \quad (15)$$

$$\langle 1|x|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{1/2}\lambda}{\pi^{1/2}} x^2 e^{-\lambda x^2} dx \quad (16)$$

$$\langle 1|x|0\rangle = \frac{2^{1/2}\lambda}{\pi^{1/2}} \frac{\pi^{1/2}}{2\lambda^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \quad (17)$$

folgt:

$$\langle x(t)\rangle = \cos(\omega t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad (18)$$