

Übungsblatt 6

6.1 Relativistische Korrekturen des Wasserstoffatoms

In der Vorlesung wurde der Spin des Elektrons durch den Spin-Bahn-Kopplungsterm

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi r^3 m_e^2} \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \quad (1)$$

in die Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms eingeführt.

Mit Hilfe des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ und des Erwartungswertes $\langle R_{nl} | \frac{1}{r^3} | R_{nl} \rangle$ bzgl. der Radialwellenfunktion R_{nl} , kann die Verschiebung der Energielevel im Wasserstoffatom auf Grund der Spin-Bahn-Kopplung berechnet werden:

$$\Delta E_{LS} = -\frac{\alpha^2}{2n^3} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1/2)(l+1)} E_{Ryd}. \quad (2)$$

Wobei $E_{Ryd} = -13.6\text{eV}$ und $\alpha \approx \frac{1}{137}$ ist. Dieser Korrekturterm gilt allerdings nur für Zustände mit $l > 0$.

Neben der Spin-Bahn-Kopplung gibt es noch weitere Korrekturterme, die aus der relativistischen Quantentheorie folgen. Dies sind die relativistische Korrektur der kinetischen Energie

$$\Delta E_{rel} = -\frac{\alpha^2}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l+1/2} \right) E_{Ryd} \quad (3)$$

und der Darwin-Termin, der nur für Zustände mit $l = 0$ eine Rolle spielt:

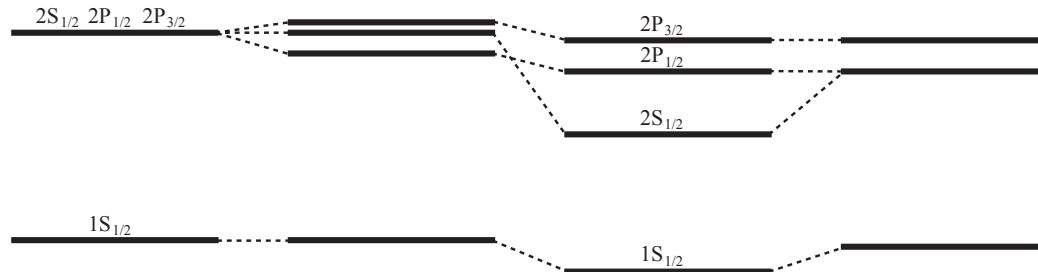
$$\Delta E_{Dar} = -\frac{\alpha^2}{n^3} E_{Ryd}. \quad (4)$$

- (a) Berechnen Sie ΔE_{LS} , ΔE_{rel} und ΔE_{Dar} für die verschiedenen 1s, 2s und 2p Zustände.
- (b) Zeichnen Sie ausgehend vom ungestörten Wasserstoffatom für die oben genannten Zustände ein Termschema, in dem die Korrekturterme einzeln hinzugefügt werden. Welche Auffälligkeiten treten hierbei auf?
- (c) Wie groß ist die relative Änderung der Energiedifferenz zwischen dem 1s und 2p Zustand auf Grund dieser relativistischen Korrekturen? Mit welcher Messgenauigkeit muss das Wasserstoffatom spektroskopiert werden, damit diese Korrekturen aufgelöst werden können? Überlegen Sie sich Beispiele für eine Strecken- und eine Gewichtsmessung bei die gleiche relative Genauigkeit erzielt wird.

- (a) Es gibt vier mögliche Zustände: $1S_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ und $2P_{3/2}$.

	$1S_{1/2}$	$2S_{1/2}$	$2P_{1/2}$	$2P_{3/2}$
$\Delta E_{LS} [10^{-5}\text{eV}]$			-3.0	1.5
$\Delta E_{rel} [10^{-5}\text{eV}]$	-90.6	-14.7	-2.6	-2.6
$\Delta E_{Dar} [10^{-5}\text{eV}]$	72.5	9.1		

(b) Nicht maßstabsgetreue Darstellung der Energieniveaus: Auf der linken Seite sind die Bohrschen Energieniveaus gezeigt und deren Korrektur auf Grund der Spin-Bahn-Koppelung, der relativistischen Massezunahme und des Darwin-Terms sind in dieser Reihenfolge rechts davon zu sehen.



Bei dieser Darstellung fällt auf, dass der $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ Zustand trotz der Korrekturen immer noch energetisch-entartet sind.

(c) Ohne die relativistischen Korrekturen beträgt die Energieaufspaltung zwischen dem 1s und 2p Zustand:

$$E_{\text{Aufspaltung}} = \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) E_{\text{Ryd}} = -\frac{3}{4} E_{\text{Ryd}} = 10.2 \text{ eV}. \quad (5)$$

Die Korrekturen für den $1S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ führen zu einer Änderung der Aufspaltung um

$$\Delta E_{\text{Aufspaltung}} = -3.0 \cdot 10^{-5} \text{ eV} - 2.6 \cdot 10^{-5} \text{ eV} - (-90.6 \cdot 10^{-5} \text{ eV} + 72.5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}) = 12.5 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \quad (6)$$

und für den $1S_{1/2}$ und $2P_{3/2}$ Zustand zu

$$\Delta E_{\text{Aufspaltung}} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ eV} - 2.6 \cdot 10^{-5} \text{ eV} - (-90.6 \cdot 10^{-5} \text{ eV} + 72.5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}) = 17 \cdot 10^{-5} \text{ eV}. \quad (7)$$

Damit beträgt die relative Änderung der Energiedifferenz etwa 10^{-5} .

Wenn man 1 Kilometer auf 1cm genau bzw. 1 Tonne auf 10g genau misst, erreicht man also die gleiche Meßgenauigkeit die von Nöten ist um die relativistischen Korrekturen des Wasserstoffatoms aufzulösen.

6.2 Gittermonochromator

Mit Hilfe einer geeigneten Lichtquelle und eines Spektrometers kann man die relativistischen Korrekturen des Wasserstoffs experimentell überprüfen. Dabei dient die Lichtquelle zur Bestimmung des Absorptionsspektrums und mittels des Spektrometers lässt sich den jeweiligen Absorptionslinien eine Wellenlänge zuordnen. Auf Grund der kleinen relativistischen Korrekturen muss das Spektrometer allerdings über ein dementsprechend hohes Auflösungsvermögen verfügen.

(a) Skizzieren Sie den Aufbau eines Gittermonochromators.

(b) Leiten Sie das Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ eines Gittermonochromators mit N ausgeleuchteten Gitterstrichen her.

Beachten Sie dabei, dass zwei Wellenlängen λ_1 und $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ dann noch mit dem Gittermonochromator auflösbar sind, wenn das erste Interferenzmaximum von λ_1 gerade noch auf das nächstliegende Interferenzminimum von λ_2 fällt (Rayleigh-Kriterium). Zur Bestimmung der Interferenzbedingungen können Sie die Intensitätsverteilung des Gitters:

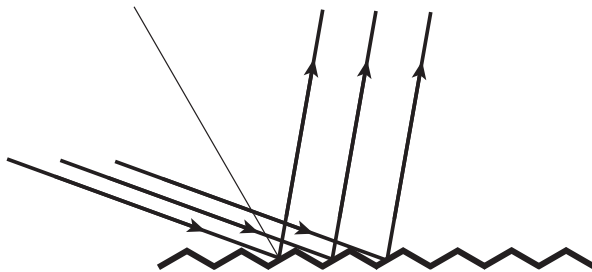
$$I(s) = I_0 \frac{\sin^2(N\pi s/\lambda)}{\sin^2(\pi s/\lambda)} \quad (8)$$

als Funktion des Gangunterschieds s zwischen zwei benachbarten Gitterstrichen benutzen.

(c) Wieviele Gitterstriche müssen beleuchtet sein, dass die Hyperfeinstruktur von Natrium ($\Delta\nu = 1.77\text{GHz}$, $\lambda = 589\text{nm}$) aufgelöst werden kann?

(d) Wie ändert sich das Auflösungsvermögen des Gittermonochromators, wenn man stattdessen das m -te Maximum analysiert?

(a)



(b) Das erste Interferenzmaximum für λ_1 tritt auf, wenn der Nenner von Gleichung (8) zum ersten Mal 0 wird, also

$$s = \lambda_1 \quad (9)$$

ist.

Das nächste Interferenzminimum von λ_2 tritt auf, wenn der Zähler von Gleichung (8) bei gleichem Gangunterschied für größer werdender Wellenlänge zum ersten Mal 0 wird, also

$$N\pi s/\lambda_2 = (N-1)\pi. \quad (10)$$

Daraus ergibt sich mit $s = \lambda_1 = \lambda_2 - \Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{N}\lambda_2 \quad (11)$$

und somit für das Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N. \quad (12)$$

(c) Mit $c = \lambda\nu$ und dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu^2}\Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu. \quad (13)$$

Und damit für die Anzahl der Gitterstriche:

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda\Delta\nu} = 2.9 \cdot 10^5. \quad (14)$$

(d) Analysiert man das m-te Maximum, ergibt sich für den Gangunterschied bei dem das m-te Maximum auftritt:

$$s = m\lambda_1 \quad (15)$$

und für die Wellenlänge bei der das nächste Minimum zu beobachten ist:

$$N\pi s/\lambda_2 = (mN - 1)\pi. \quad (16)$$

Daraus ergibt sich analog zu Aufgabenteil (b) das Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN. \quad (17)$$

6.3 Fabry-Perot-Interferometer

Statt eines Gittermonochromators kann auch ein Fabry-Perot-Interferometer zur Analyse der Wellenlänge benutzt werden. Ein solches Interferometer besteht aus zwei planparallelen Spiegeln im Abstand L . Die Spiegel sind dabei so ausgerichtet, dass das Licht zwischen ihnen hin- und herreflektiert wird.

(a) Welche Wellenlänge muss das Licht haben, damit sich im Resonator eine stehende Welle ausbilden kann?

(b) Wie groß ist der Frequenzabstand zweier Eigenfrequenzen des Resonators? Mit anderen Worten: Wie groß ist der freie Spektralbereich des Interferometers?

(c) Beide Spiegel des Interferometers haben die gleiche Amplitudenreflektivität r (und damit auch die gleiche Reflektivität $R = r^2$ und Transmittivität $T = 1 - r^2$). Welche Wellenamplitude hat dann ein Lichtfeld $E(t, x) = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$, das von links in den Resonator eindringt, nach dem Passieren des Resonators, falls die Reflektionen zwischen den Spiegeln außer acht gelassen werden?

(d) Welche Wellenamplitude hat das Licht, wenn es während des Passierens einmal bzw. N -mal zwischen den Spiegeln hin- und herreflektiert wird?

(e) Berechnen Sie das Feld hinter dem Resonator als Überlagerung der Wellenamplituden, die 0 bis N Mal zwischen den Spiegeln hin- und herreflektiert werden und vereinfachen Sie das Ergebnis mit Hilfe der geometrischen Reihe ($\sum_{k=0}^N q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$).

(f) Berechnen Sie die transmittierte Intensität, indem Sie N gegen ∞ gehen lassen und $|1 - Re^{i\delta}|^2 = (1 - R)^2(1 + F \sin^2(\delta/2))$ mit dem Finesse-Koeffizienten $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ verwenden.

(g) Für große F ist die Halbwertsbreite der Transmissionsmaxima durch

$$\Delta\nu = c \frac{1 - r^2}{2\pi L r} \quad (18)$$

gegeben. Was ergibt sich hieraus für die Auflösung?

(a)

$$L = N \frac{\lambda}{2} \quad (19)$$

bzw.

$$\lambda = \frac{2L}{N} \quad (20)$$

(b)

$$\Delta\nu = \nu_{N+1} - \nu_N = \frac{c}{\lambda_{N+1}} - \frac{c}{\lambda_N} = \frac{c}{2L}(N+1-N) = \frac{c}{2L} \quad (21)$$

(c) Damit das Licht den Resonator passieren kann, muss es an beiden Spiegel transmittiert werden. Somit ergibt sich für die Wellenamplitude nach dem Resonator:

$$E'_0 = \sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2}E_0. \quad (22)$$

(d) Wenn das Licht einmal hin- und herreflektiert wird, ergibt sich:

$$E'_1 = (1-r^2)r^2E_0e^{i\delta}. \quad (23)$$

wobei δ den Phasenunterschied zur nichtreflektierten Wellenamplitude bezeichnet und durch dem Laufzeitunterschied zu Stande kommt. Somit ist

$$\delta = \omega \frac{2L}{c}. \quad (24)$$

Für N-maliges Hin- und Herreflektieren erhält man dann:

$$E'_N = (1-r^2)(r^2e^{i\delta})^N E_0. \quad (25)$$

(e) Das elektrische Feld hinter dem Resonator ergibt sich aus Überlagerung aller Reflektionen.

$$E'_{gesamt} = \sum_{j=0}^N E'_j = (1-r^2)E_0 \sum_{j=0}^N (r^2e^{i\delta})^j \quad (26)$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe führt dies zu:

$$E'_{gesamt} = (1-r^2)E_0 \frac{1-(r^2e^{i\delta})^{N+1}}{1-r^2e^{i\delta}}. \quad (27)$$

(f) Für $N \rightarrow \infty$ erhält man mit $R = r^2 < 1$:

$$E'_{gesamt} = E_0 \frac{1-R}{1-Re^{i\delta}}. \quad (28)$$

Daraus ergibt sich die transmittierte Intensität zu

$$I = \left| E'_{gesamt} \right|^2 = |E_0|^2 \frac{(1-R)^2}{|1 - Re^{i\delta}|^2} = \frac{|E_0|^2}{1 + F \sin^2(\delta/2)} = \frac{|E_0|^2}{1 + F \sin^2(\frac{L\omega}{c})}. \quad (29)$$

(g) Analog zu Aufgabe 6.2 (c) erhält man

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu = \lambda^2 \frac{1-R}{2\pi L \sqrt{R}}. \quad (30)$$

und damit für das Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2L}{\lambda} \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}. \quad (31)$$