

Übungsblatt 7

7.1 Vektordiagramme zur Spin-Bahn-Kopplung

Die Bahndrehimpuls-Quantenzahl eines Elektrons sei (a) $l = 0$ und (b) $l = 1$. Geben Sie an zu welchen Werten des Gesamtdrehimpulses j Bahndrehimpuls und Spin koppeln können und welche Werte m_j die z-Komponente von $\vec{j}$ annehmen kann. Berechnen Sie die Länge der einzelnen Vektoren $\vec{j}$, $\vec{l}$ und $\vec{s}$ sowie die Relativwinkel zwischen $\vec{l}$ und $\vec{s}$. Zeichnen Sie die Vektordiagramme zwischen allen möglichen Kopplungen von l und s zu j .

Lösung: (siehe auch Abbildung)

a) $l = 0, s = \frac{1}{2}$:

$$j = \frac{1}{2} \Rightarrow J = \sqrt{j(j+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$m_j = \pm \frac{1}{2}$$

b) $l = 1, s = \frac{1}{2}$:

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \Rightarrow J = \sqrt{j(j+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar, \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$$

$$j = \frac{1}{2} \Rightarrow m_j = \pm \frac{1}{2}$$

$$j = \frac{3}{2} \Rightarrow m_j = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Um den Relativwinkel zwischen $\vec{L}$ and $\vec{S}$ zu bestimmen betrachte das Skalarprodukt

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} ((j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)))$$

Hiermit erhält man für den Winkel zwischen $\vec{L}$ und $\vec{S}$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{|\vec{L}| |\vec{S}|} = \frac{1}{2} \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{\sqrt{l(l+1)s(s+1)}}$$

This yields for $j = \frac{1}{2}$:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{4}}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = -35.3^\circ$$

and for $j = \frac{3}{2}$:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{\frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4}}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 65.9^\circ$$

7.2 Hyperfeinstruktur und Dopplereffekt

Neben den relativistischen Korrekturen (siehe Übungsblatt 6) gibt es noch weitere Korrekturen zu den Energiezuständen des Wasserstoffatoms. Eine davon ist die Hyperfeinstruktur, die durch den Spin I des Protons (Kernspin) verursacht wird. Für 1s-Zustände lässt sich diese Korrektur schreiben als

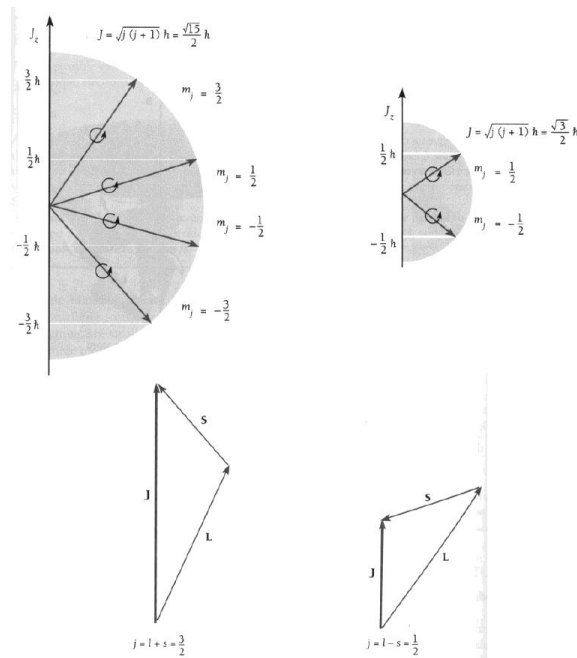
$$\Delta E_{I,j} = \frac{2}{3} g_j g_I \frac{\alpha^4 \mu^3 c^2}{2 m_e m_K} (F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)).$$

wobei

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)},$$

g_I der g-Faktor des Kerns und μ die reduzierte Masse des Systems ist. F bezeichnet den Gesamtspin ($\vec{F} = \vec{s} + \vec{I}$), $\vec{s}$ den Spin und $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ den Gesamtdrehimpuls des Elektrons.

(a) Bestimmen die Hyperfeinaufspaltung $\Delta E_{I,j}$ zwischen den beiden Zuständen $1s_{1/2}(F=1)$



und $1s_{1/2}(F = 0)$ des Grundzustandes des Wasserstoffatoms. Drücken Sie das Ergebnis in Einheiten von $[\text{cm}^{-1}]$, $[\text{Hz}]$ und $[\text{eV}]$ aus.

(b) Analog zum Protonium kann auch das Antiteilchen des Elektrons (Positron) mit einem Elektron für kurze Zeit einen gebundenen Zustand eingehen, der Positronium genannt wird. Welche Größen ändern sich für das Positronium in Gleichung (1) und welche neuen Werte besitzen sie?

Bestimmen Sie analog zur Aufgabe (a) mit diesen neuen Werten die Hyperfeinaufspaltung des $1s$ -Zustands im Positronium.

(c) Die 21cm-Linie von Wasserstoff wurde mit sehr hoher Präzision vermessen. Sie lässt sich auch in den Spektren von Galaxien nachweisen, doch ist sie hier normalerweise leicht gegenüber dem Messwert verschoben, der sich bei Labormessungen auf der Erde ergibt. Für die Galaxien N959 und O255-36 erscheint die Linie z.B. bei um 0.042 cm bzw. 0.437 cm größeren Wellenlängen. Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

Lösung:

Für den $1s_{1/2}(F = 0)$ ist $n = 1$, $F = 0$, $l = 0$, $s = 1/2$ und $j = 1/2$, für den $1s_{1/2}(F = 1)$ ist $F = 1$, $l = 0$, $s = 1/2$ und $j = 1/2$, d.h. einmal stehen $\vec{j}$ und $\vec{F}$ antiparallel und im anderen Fall parallel zueinander. Somit ergibt sich für die Aufspaltung aufgrund der Hyperfeinstruktur:

$$\Delta E_{HFS}(1s_{1/2}(F = 1) - 1s_{1/2}(F = 0)) = \frac{2}{3} g_j g_I \frac{\alpha^4 \mu^3 c^2}{2m_e m_K} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{6}{4} \right) \right) = \frac{2}{3} g_j g_I \frac{\alpha^4 \mu^3 c^2}{m_e m_K} = 9.28 \cdot 10^{-24} J.$$

Dies entspricht

$$\Delta E_{HFS}(1s_{1/2}(F = 1) - 1s_{1/2}(F = 0)) = \frac{9.28 \cdot 10^{-25} J}{1.6 \cdot 10^{-19} J/eV} = 5.87 \cdot 10^{-6} eV.$$

Die hierzu gehörige Wellenlänge ist

$$\lambda_{HFS}^{-1} = \frac{\Delta E_{HFS}}{hc} = \frac{9.28 \cdot 10^{-25} J}{6.626 \cdot 10^{-34} Js \cdot 2.998 \cdot 10^8 m/s} = 0.0467 \text{cm}^{-1},$$

also entsprechend einer Wellenlänge von 21cm und einer Frequenz von

$$\nu_{HFS} = c \cdot \lambda_{HFS}^{-1} = 2.998 \cdot 10^8 m/s \cdot 4.67 \text{m}^{-1} = 1.4 \text{GHz}$$

b)

Um das Positronium richtig zu behandeln muss man

$$g_I \rightarrow g_S = 2 \quad \mu \rightarrow \frac{m_e}{2} \quad m_k \rightarrow m_e$$

Damit ergibt sich für die Hyperfeinaufspaltung des Positroniums:

$$\Delta E_{HFS}(1s_{1/2}(F=1) - 1s_{1/2}(F=0)) = \frac{1}{3} \alpha^4 m_e c^2 = 4.8 \cdot 10^{-4} \text{eV} \quad (1)$$

Gemessen wird aber ein abweichender Wert von $8.5 \cdot 10^{-4} \text{eV}$. Der Grund hierfür ist ein zusätzlicher Term in der e^+e^- -Wechselwirkung der in der ep -Wechselwirkung nicht vorhanden ist ($e^-e^+ \rightarrow \gamma^* \rightarrow e^-e^+$).

c)

Die höhere Wellenlänge ergibt sich daraus, dass die Galaxien sich von unserer Galaxie entfernen. Dies verschiebt die Wellenlängen zu größeren Werten. Die Wellenlängenänderung aufgrund der Relativbewegung der Galaxien beträgt:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{v}{c}$$

Die Galaxien bewegen sich also mit Geschwindigkeiten von

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Es ergibt sich für die Galaxie N959 eine Geschwindigkeit von 601 km/s und für O255-36 6208 km/s.

7.3 Die Lamb-Verschiebung

Die Lamb-Verschiebung des 1s-Grundzustands in Wasserstoff wurde mittels Laserspektroskopie bestimmt. In einem besonders eleganten Verfahren konnte die Differenz der $2s \rightarrow 4s$ -Übergangsenergie und dem vierten Teil der $1s \rightarrow 2s$ -Übergangsenergie gemessen werden¹:

$$\Delta E = (E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4}(E_{2s} - E_{1s}). \quad (2)$$

In dieser Summe fallen die größten Energiebeiträge weg, wie sie durch die Rydbergformel $E_{Ryd} = -R_\infty/n^2$ gegeben sind. Übrig bleiben die relativistischen Beiträge sowie die Lamb-Verschiebung. Aus dem experimentellen Wert von 4797 MHz lässt sich die 1s-Lamb-Verschiebung L_{1s} bestimmen. Verwenden Sie hierfür die aus dem Experiment von Lamb

¹Die Beiträge der Hyperfeinstruktur in den experimentellen Werten sind hier der Einfachheit halber weglassen.

und Retherford bekannte 2s-Lamb-Verschiebung ($L_{2s} = 1057 \text{ MHz}$), die sehr viel kleinere 4s-Lamb-Verschiebung ($L_{4s} = 131 \text{ MHz}$), sowie den Ausdruck für die Dirac-Energien (siehe Vorlesung). Welcher Anteil von ΔE beruht auf den Dirac-Beiträgen?

Lösung: Unter Vernachlässigung der Hyperfeinstruktur kann man die Energieniveaus der Zustände schreiben:

$$E_{n,j} = E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right) + \Delta E_{Lamb}$$

Der erste Term entspricht einfach den Bohr'schen Energieniveaus und somit ist

$$(E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4}(E_{2s} - E_{1s})_{\text{Bohr}} \propto \frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 0$$

Da es sich bei allen Zuständen um s -Zustände handelt gilt immer $j = \frac{1}{2}$. Die Dirac-Beiträge sind also gegeben durch

$$\Delta E_{\text{Dirac}} = 13.6 \text{ eV} \cdot \frac{\alpha^2}{n^3} \left(1 - \frac{3}{4n} \right),$$

für den 1s-Zustand ist der Term $\frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{3}{4n} \right)$ gleich $\frac{1}{4}$, für den 2s-Zustand gleich $\frac{5}{64}$ und für den 4s-Zustand gleich $\frac{13}{1024}$. Damit erhält man

$$\left[(E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4}(E_{2s} - E_{1s}) \right]_{\text{Dirac}} = -\alpha^2 13.6 \text{ eV} \frac{23}{1024} = 16.3 \mu\text{eV}.$$

Dies entspricht einer Frequenz von

$$\left[(E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4}(E_{2s} - E_{1s}) \right]_{\text{Dirac}} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 16.3 \mu\text{eV}}{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 3.93 \text{ GHz}.$$

Somit ergibt sich für den Zusammenhang aus den Messungen und der gesuchten Lamb-shift E_{1s}^L :

$$\Delta E_{\text{gem}} = 4797 \text{ MHz} = \Delta E_{\text{Dirac}} + \left((\Delta E_{4s}^L - \Delta E_{2s}^L) - \frac{1}{4}(\Delta E_{2s}^L - \Delta E_{1s}^L) \right)$$

und damit

$$\Delta E_{1s}^L = 4(4797 - 3930 - 131 + \frac{5}{4} 1057) \text{ MHz} = 8229 \text{ MHz}.$$