

Übungsblatt 8

8.1 Das Lamb-Retherford Experiment

Beschreiben Sie den Aufbau (mit Skizze), die Durchführung und die Ergebnisse des Experiments von Willis E. Lamb, Jr. und Robert C. Retherford aus dem Jahr 1947 zur Untersuchung der Energiedifferenz zwischen den $2^2S_{1/2}$ und $2^2P_{1/2}$ Zuständen des Wasserstoffatoms.

Lösung:

Eine kompakte Darstellung des Lamb-Retherford Experiments ist in [1] unter dem Kapitel 5.7.3. *Lamb-Verschiebung* zu finden.

8.2 Optische Auswahlregeln

(a) Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte des Paritätsoperators $\hat{P}\psi(\vec{r}) \equiv \psi(-\vec{r})$ und erläutern Sie seinen Zusammenhang mit dem Gesamtdrehimpuls im atomaren Wasserstoffsystem.

(b) Zeigen Sie ganz allgemein mit Hilfe der Spiegelinvarianz ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) eines Systems, dass elektrische Dipolübergänge nur für Zustände mit unterschiedlicher Parität vorkommen.

(c) Berechnen Sie explizit das elektrische Dipolmatrixelement für den $n = 2 \rightarrow n = 1$ Übergang im Wasserstoffatom und zeigen Sie damit, dass die Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ gültig ist.

Lösung:

(a) Der Paritätsoperator bewirkt eine Raumspiegelung $\hat{P} : \vec{r} \mapsto -\vec{r}$. Daraus folgt

$$\hat{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) = p\psi(\vec{r})$$

mit dem Eigenwert p . Es gilt aber auch

$$\hat{P}^2\psi(\vec{r}) = \hat{P}\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) = p^2\psi(\vec{r}).$$

Dies wiederum führt zu $p^2 = 1$, also zu den möglichen Eigenwerten $p = \pm 1$. $\hat{P}$ kommutiert mit dem Hamiltonian, $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, also ist die Parität eine Erhaltungsgröße des Systems. Da das Photon einen Dreimpuls von $\hbar$ hat, ist nur $\Delta l = \pm 1$ möglich, damit die Parität des Gesamtsystems erhalten ist.

(b) Für alle Dipolübergänge gilt Paritätsänderung. Das elektrische Dipolmatrixelement

$$M_{nlm \rightarrow n'l'm'} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n'l'm'}^*(x) \cdot ex \cdot \psi_{nlm}(x) dx$$

verschwindet nur dann nicht, wenn der Integrand eine gerade Funktion ist, d.h. invariant bezüglich Spiegelung am Ursprung ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$). Die Parität von ψ_{nlm} beträgt $(-1)^l$ und bestimmt ob ψ_{nlm} gerade oder ungerade ist. Die Funktion ex , mit der Elementarladung e , ist ungerade,

woraus folgt dass das Produkt $\psi_{n'l'm'}^* \cdot \psi_{nlm}$ ungerade sein muss. Dies ist nur möglich, wenn l und l' sich um eine ungerade Zahl unterscheiden, also $|l - l'| = 1, 3, 5, \dots$. Das Photon kann aber höchstens $\hbar$ übertragen, woraus $\Delta l = \pm 1$ folgt.

(c) Für die Parität einer Wellenfunktion sind lediglich die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ ausschlaggebend. Betrachte das elektrische Dipol entlang der z-Richtung mit $z = r \cos \theta$. Dann gilt

$$M_{100 \rightarrow 200} \propto \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{00}^*(\theta, \phi) \cos \theta Y_{00}(\theta, \phi) d\theta d\phi \propto \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = 0,$$

$$M_{100 \rightarrow 21\pm 1} \propto \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta d\phi \propto \sin^3 \theta \Big|_0^\pi = 0,$$

sowie

$$M_{100 \rightarrow 210} \propto \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\phi \propto \cos^3 \theta \Big|_0^\pi \neq 0.$$

Im Wasserstoffatom gilt also $\Delta l = 1, \Delta m = 0$ für einen elektrischen Dipolübergang zwischen $n = 2$ und $n = 1$, wobei das Licht linear entlang der z-Richtung polarisiert ist.

8.3 Abstrahlcharakteristik von Superpositionen

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Zeitentwicklung der Superposition

$$\Psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{100}(t=0) + \psi_{210}(t=0) \},$$

wobei ψ_{100} und ψ_{210} Wellenfunktionen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms mit Energien E_1 bzw. E_2 sind, zu einer oszillierenden Wahrscheinlichkeitsdichte in z-Richtung führt.

(a) In welche Richtung und mit welcher Polarisation wird Licht abgestrahlt?

(b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Superposition

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{100}(t) + \psi_{211}(t) \}$$

und zeigen Sie, dass das Betragsquadrat von $\Psi(t)$ in der x,y-Ebene rotiert. Wie sieht die Abstrahlcharakteristik, also Richtung und Polarisation des Licht, in diesem Fall aus?

Lösung:

(a) In Richtung der z-Achse wird kein Licht abgestrahlt. Senkrecht dazu wird linear polarisiertes Licht abgestrahlt, wobei die Polarisationsachse in z-Richtung zeigt.

(b) Da ψ_{100} und ψ_{211} Eigenfunktionen sind, ist deren Zeitentwicklung bekannt, nämlich

$$\psi_{100}(t) = e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_{100}(t=0)$$

und

$$\psi_{211}(t) = e^{-iE_3 t/\hbar} \psi_{211}(t=0),$$

wenn E_3 die Energie der Wellenfunktion ψ_{211} ist. Daraus folgt die Zeitentwicklung der Superposition

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{100}(t) + \psi_{211}(t) \} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_{100}(t=0) + e^{-iE_3 t/\hbar} \psi_{211}(t=0) \}.$$

Dies lässt sich umschreiben zu

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_1 t/\hbar} \{ \psi_{100}(t=0) + e^{-i\omega_0 t} \psi_{211}(t=0) \},$$

mit $\omega_0 \equiv (E_3 - E_1)/\hbar$. Die Wellenfunktion ψ_{211} ist proportional zur Kugelflächenfunktion

$$Y_{11}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi},$$

während $\psi_{100} \propto Y_{00} = \sqrt{1/4\pi}$ keine Winkelabhängigkeit besitzt. Nun folgt für die Superposition

$$\psi(t) \propto R_{10} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} - R_{21} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \cdot e^{-i\omega_0 t}.$$

Die Gesamtphase verschwindet gerade dann, wenn $\phi = \omega_0 t$, d.h. die Punkte maximaler Interferenz rotieren in der x,y-Ebene gegen den Uhrzeigersinn mit der Frequenz ω_0 . Dies bedeutet in z-Richtung wird σ_L -Licht, entgegen der z-Richtung σ_R -Licht und senkrecht dazu linear polarisiertes Licht abgestrahlt.

Literatur

- [1] W. Demtröder, *Experimentalphysik 3. Atome, Moleküle und Festkörper*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage (2000).