

Übungsblatt 9 Lösung

9.1 Normaler und anomaler Zeemaneffekt

Der Zeemaneffekt wird besonders einfach, wenn der Gesamtspin $s = 0$ ist. Diesen Fall nennt man den normalen Zeemaneffekt. Bei $s \neq 0$ spricht man vom anomalen Zeemaneffekt.

- Normaler Zeemaneffekt. Skizzieren Sie für ein Atom mit einem $l = 1$ -Zustand und einem darüberliegenden $l = 2$ -Zustand das Aufspaltungsmuster, das beim Anlegen eines äußeren Magnetfelds entsteht, sowie die möglichen Übergänge zwischen den $l = 1$ - und den $l = 2$ -Niveaus, wenn gilt: $\Delta m = 0, \pm 1$. Wieviele energetisch unterscheidbare Übergänge gibt es?
- Anomaler Zeemaneffekt: Zeichnen Sie das entsprechende Diagramm für ein Atom mit einem $^2S_{1/2}$ - und einem $^2P_{3/2}$ -Zustand. Geben Sie die Landé-Faktoren der Zustände an. Wieviele energetisch unterscheidbare Übergänge gibt es zwischen den $^2S_{1/2}$ - und einem $^2P_{1/2}$ -Energieniveaus und wie weit sind sie getrennt?
- Zeichnen Sie für den $^2P_{1/2}$ - und $^2P_{3/2}$ -Zustand das Vektordiagramm der Kopplung von $\vec{l}$ und $\vec{s}$ zu $\vec{j}$ (siehe Blatt 7) und konstruieren Sie damit das gekoppelte magnetische Moment und dessen Projektion in Richtung von $\vec{j}$.

Lösung

- a) Es gilt allgemein:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Für $s = 0$ gilt $j = l$ und damit $g = 1$. Das ist unabhängig von l und der normale Zeemaneffekt. m kann die Werte von $-l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l$ annehmen und ist ganzzahlig. Es gibt immer genau drei Übergänge ($\Delta m = 0, \pm 1$), unabhängig von l .

- b) Die Aufspaltung und die Zahl der Übergänge ist von l, s und j abhängig. Hier gibt es eine zweifache Aufspaltung beider Niveaus und vier Übergänge.

Für $^2S_{1/2}$ ist $l = 0, s = 1/2, j = 1/2$ und damit $g = 2$. $m_j = \pm 1/2$

Für $^2P_{1/2}$ ist $l = 1, s = 1/2, j = 1/2$ und damit $g = 2/3$. $m_j = \pm 1/2$

- c) $^2P_{1/2}$: $g_j = 2/3$

$^2P_{3/2}$: $g_j = 4/3$

9.2 Magnetfeldstärken

Die Sonne hat ein schwaches Dipolfeld (einige 10^{-4} Tesla an der Oberfläche), und deutlich stärkere Felder in den Sonnenflecken. In den Flecken ist das Feld im wesentlichen radial, zeigt also in der Sonnenmitte auf den Beobachter zu. Die Zeeman-Aufspaltungen der meisten Linien in der Sonne sind nicht durch LS-Kopplung erklärbar, verhalten sich aber wie Linien beim einfachen Zeemaneffekt, mit einem effektiven Landé-Faktor, der typisch zwischen 0,5 und 2,5 liegt.

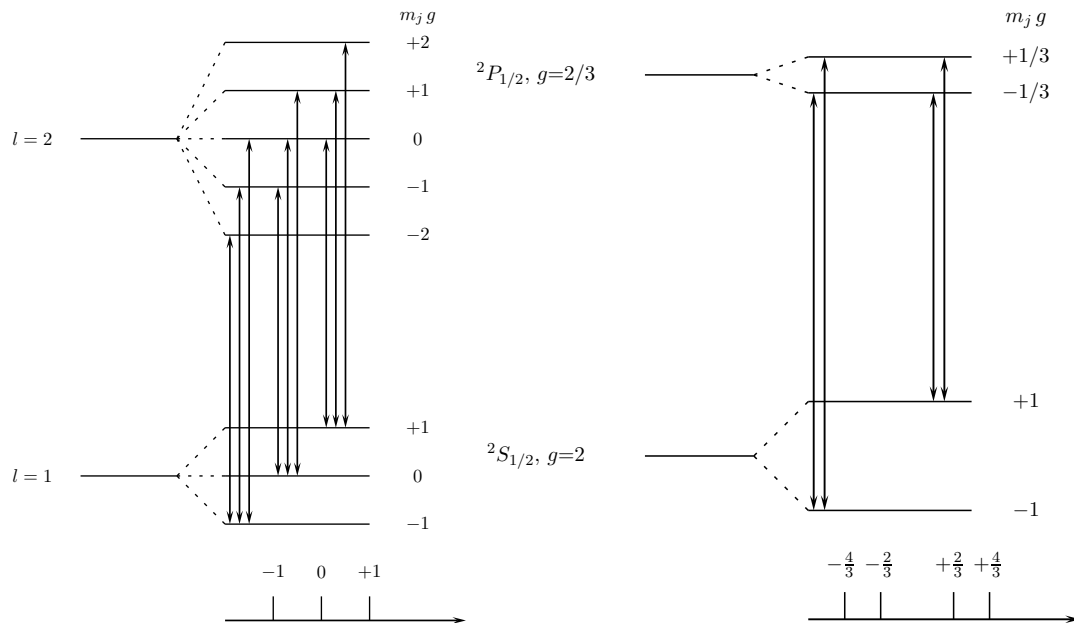


Abbildung 1: Das Auspaltungsschema und die resultierenden Übergänge für $l = 1$, $l = 2$, $s = 0$ (normaler Zeemaneffekt), sowie $^2S_{1/2}$ und $^2P_{1/2}$ -Zustände (anomaler Zeemaneffekt).

- Besonders geeignet für Zeeman-Messungen sind Spektrallinien, die weit im roten Spektralbereich oder im nahen Infrarotbereich liegen. Warum ist bei diesen die Aufspaltung bei geringerer spektraler Auflösung $\lambda/\Delta\lambda$ beobachtbar als bei Linien kleinerer Wellenlänge?
- Die Fei-Linie bei 603,25 nm hat einen effektiven Landé-Faktor von 2,5, ist also magnetisch sehr sensitiv. Bei einer Messung wurde in einem Sonnenfleck eine Aufspaltung der Linie von $\pm 5,81$ pm gemessen. Wie groß ist das Magnetfeld in diesem Sonnenfleck?
- Vergleichen Sie dieses Magnetfeld mit dem Erdmagnetfeld, typischen NMR-Magneten, und den stärksten im Labor herstellbaren Magnetfeldern.
- Die stärksten bekannten Magnetfelder treten bei Neutronensternen mit etwa 10^8 Tesla auf. Vergleichen Sie die Energie $\mu_B B$ und die Zyklotronenergie des freien Elektrons $\hbar\omega_c$ in diesem Feld mit der potentiellen Energie des Elektrons im elektrischen Feld des Kerns im Wasserstoffatom auf der ersten Bohrschen Bahn. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

- $\Delta\lambda/\lambda_0 = \frac{\Delta E_{\text{Zeeman}}}{E} = \frac{\Delta E_{\text{Zeeman}}}{hc/\lambda_0} \rightarrow \Delta\lambda = \frac{\Delta E_{\text{Zeeman}}}{hc} \lambda_0^2$. Da die Aufspaltung der Niveaus nicht von der Energie selbst abhängt, nimmt $\Delta\lambda$ mit λ^2 zu.
- $\Delta\lambda = \frac{\mu_B g B}{hc} \lambda_0^2 \rightarrow B = \frac{\Delta\lambda h c}{\mu_B g \lambda_0^2} = 0,13$ Tesla
- Erdmagnetfeld: etwa $4 \dots 6 \cdot 10^{-5}$ T, supraleitender NMR-Magnet: 6 T, Flusskompressions-generator (FLUX, im englischen EPFCG = explosively pumped flux compression generator): kurzzeitig bis etwa 300 T, der Flusskompressionsgenerator komprimiert durch eine Explosion ein Magnetfeld (welches dadurch massiv verstärkt wird) und wird durch die Explosion zerstört. Kann einen EMP (= elektromagnetischen Puls) erzeugen.
- $\mu_B B = 5,8 \cdot 10^3$ eV, $\hbar\omega_c = 1,2 \cdot 10^4$ eV. Das ist sehr groß gegen die potentielle Energie (etwa 10 eV). Das Magnetfeld ist also keine kleine Störung mehr, sondern stark dominant. Im

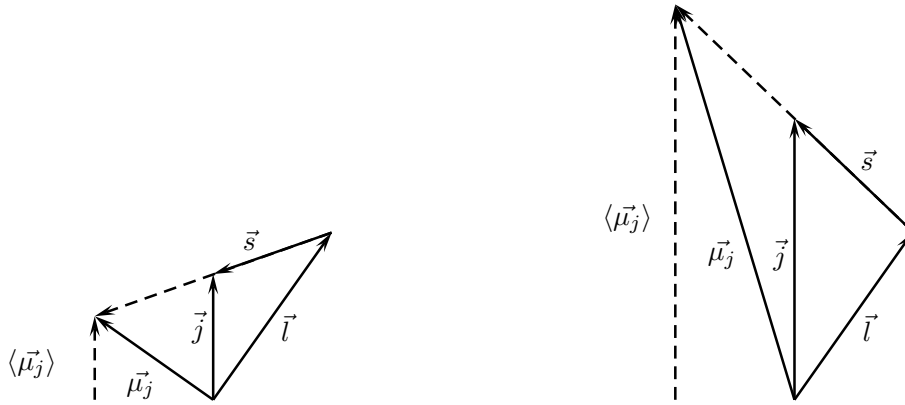


Abbildung 2: Addition der Drehimpulse $\vec{l}$ und $\vec{s}$ zu $\vec{j}$ und der zugehörigen magnetischen Momente. Beim anomalen Zeemaneffekt sind $\vec{\mu}_j$ und $\vec{j}$ nicht mehr parallel, da das magnetische Moment des Spins 2 beträgt. Im Mittel wirkt dann nur die Projektion von $\vec{\mu}_j$ in Richtung von $\vec{j}$. Der Landé-Faktor ist das Verhältnis von $|\langle \vec{\mu}_j \rangle|$ zu $|\vec{j}|$.

Grenzfall Landau-Niveaus, wie bei freien Teilchen im Magnetfeld. Das starke Magnetfeld der Neutronensterne wurde erstmals durch die Zyklotronlinie im Röntgenbereich gemessen. Die starken Felder von weißen Zwergen und Neutronensternen haben ähnliche Ursachen wie beim FLUX: Erhaltung des magnetischen Flusses beim Kollaps.

9.3 Ramsey-Spektroskopie

Ziel der Ramsey-Spektroskopie ist es, präzise die Frequenz eines atomaren Übergangs zu bestimmen. Sie beinhaltet sowohl kohärente Kopplung des atomaren Zweiniveausystems durch Mikrowellen- oder Laserstrahlung als auch freie Propagation des atomaren Systems ohne Wechselwirkung mit dem Lichtfeld. In der Rotating-Wave-Approximation (RWA) begibt man sich in ein mit der Kopplungsfrequenz rotierendes Bezugssystem. In diesem Bezugssystem sind die Bewegungsgleichungen der Amplituden von Grundzustand $c_g(t)$ und angeregtem Zustand $c_e(t)$ gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_g \\ c_e \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 2\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_g \\ c_e \end{pmatrix} \quad (1)$$

- a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich ausgehend von $c_g(t=0) = 1$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude des angeregten Zustands unter Einfluss der Rabi-Kopplung Ω mit Verstimmung Δ schreiben lässt als

$$c_e(t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_{\text{eff}}} \sin\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}}{2} t\right) e^{-i\frac{\Delta}{2} t} \quad (2)$$

Der Vollständigkeit halber sei hier die entsprechende Zeitentwicklung des Grundzustands gegeben:

$$c_g(t) = \left(\cos\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}}{2} t\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_{\text{eff}}} \sin\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}}{2} t\right) \right) e^{-i\frac{\Delta}{2} t} \quad (3)$$

Dabei ist $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ die effektive Rabifrequenz. Die Zeitentwicklung der allgemeinen Superposition $c_g(t)|g\rangle + c_e(t)|e\rangle$ lässt sich als Bewegung auf der Blochkugel beschreiben. Zeigen Sie, dass Gl. 2 und 3 für $\Delta = 0$ einer Drehung um die x-Achse entspricht und zeichnen Sie die entsprechende Bahn auf Ihrer eigenen Blochkugel. Ein sogenannter $\frac{\pi}{2}$ -Puls entspricht einer Kopplung, für die $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ gilt. An welchem Punkt der Kugel befindet man sich nach einem solchen Puls (wiederum ausgehend von $c_g(t=0) = 1$)?

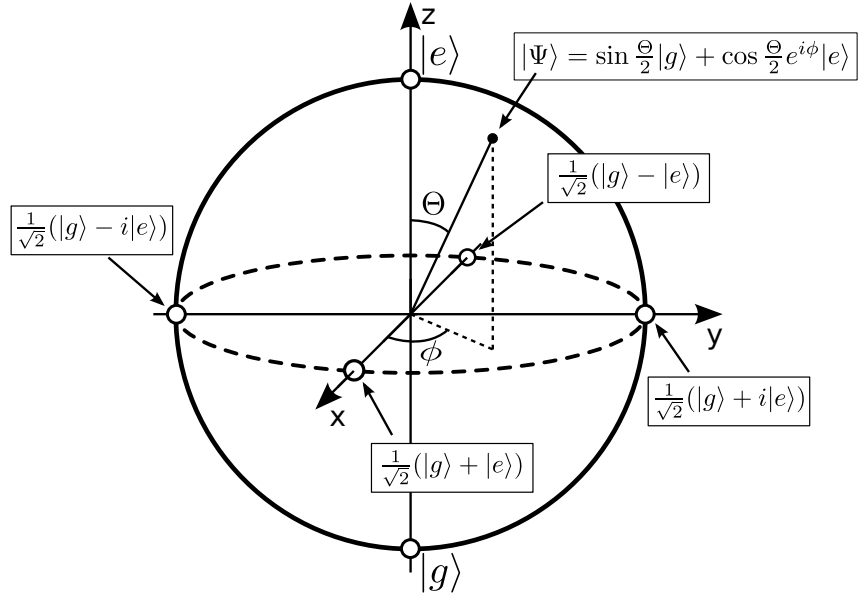


Abbildung 3: Blochkugel

Lösung Für $\Delta = 0$ ist $\Omega_{\text{eff}} = \Omega$. Die komplexen Koeffizienten $c_g(t)$ und $c_e(t)$ sind periodisch in der Zeit mit der Periode $\frac{4\pi}{\Omega}$. Wir betrachten die erste Periode. Zerlegen der Koeffizienten in Betrag und Phase ergibt:

$$c_g(t) = |c_g(t)| \cdot e^{i\phi_g(t)}$$

$$c_e(t) = |c_e(t)| \cdot e^{i\phi_e(t)}$$

mit

$$|c_g(t)| = \left| \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right| \quad \phi_g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \pi & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ \pi & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ 0 & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

$$|c_e(t)| = \left| \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right| \quad \phi_e(t) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

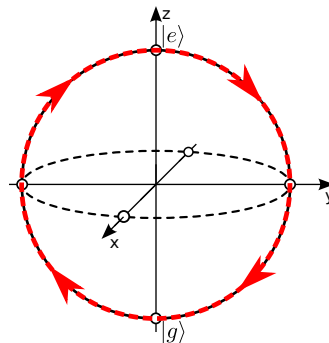
Unter Beachtung der 2π -Mehrdeutigkeit ergibt sich für die relative Phase

$$e^{i\phi(t)} = e^{i[\phi_e(t) - \phi_g(t)]} \text{ mit } \phi(t) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

Die entsprechende Zeitabhängigkeit von Θ ergibt sich aus den Beträgen zu:

$$\Theta(t) = \begin{cases} \pi - \Omega t & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \Omega t - \pi & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ 3\pi - \Omega t & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ \Omega t - 3\pi & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

Damit entspricht die Zeitentwicklung einer Drehung um die x-Achse vom Südpol der Bloch-Kugel über die negative y-Achse zum Nordpol, zur positiven y-Achse und zurück zum Südpol:



Nach einem $\frac{\pi}{2}$ -Puls befindet man sich also auf der negativen y-Achse in der Superposition $|\Psi(t = \frac{\pi}{2\Omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - i|e\rangle)$

b) Gegeben sei die Superposition

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - i|e\rangle) \quad (4)$$

Im Fall $\Omega = 0$ (ohne Kopplung, freie Evolution) und mit Verstimmung Δ gegenüber der Kopplungsfrequenz ist die Zeitentwicklung von Grund- und angeregtem Zustand gegeben durch

$$c_g(t) = c_g(0) \quad (5)$$

$$c_e(t) = c_e(0)e^{-i\Delta t} \quad (6)$$

Um welche Achse wird jetzt rotiert? Nach welchen Zeiten T landet man bei $|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle)$?

Lösung Jetzt wird um die z-Achse rotiert, für $\Delta > 0$ im Uhrzeigersinn. Nach den Zeiten

$$T_n = \frac{1}{\Delta}(\pi + 2\pi n) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(eine halbe + n ganze Umdrehungen) befindet man sich bei der Superposition $|\Psi(T_n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle)$.

c) Eine mögliche volle Ramsey-Sequenz besteht aus einem $\frac{\pi}{2}$ -Puls, einer Zeit T freier Evolution, gefolgt von einem weiteren $\frac{\pi}{2}$ -Puls mit derselben Phase (Drehung um dieselbe Achse mit gleichem Drehsinn) wie der erste Puls. In einer modernen Atomuhr (Atomic-Fountain-Clock) sei die Zeit $T = 0.5s$. Wie groß muss Δ während dieser Zeit sein, damit

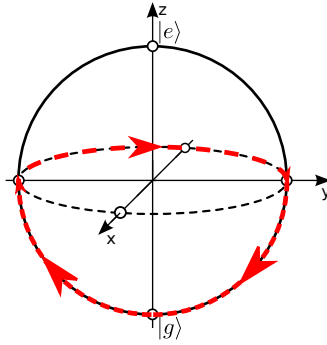


Abbildung 4: Volle Ramsey-Sequenz auf der Blochkugel mit $\Delta \cdot T = \pi$

der zweite Puls zu $|c_e|^2 = 0$ führt? Die Abweichung Δ der atomaren Frequenz vom Lokaloszillator (Frequenz des Koppelfelds) kann damit sehr genau bestimmt werden. Welcher relativen Genauigkeit entspricht der Abstand eines Maximums zum nächsten Minimum der so entstehenden sog. Ramsey-Fringes auf der Frequenz des Zeitstandards (^{133}Cs -Hyperfein bei 9192631770 Hz)?

Lösung Ein $\frac{\pi}{2}$ -Puls entspricht einer viertel Umdrehung. Nach dem ersten Puls sei $t = 0$. Damit der zweite Puls den Zustand wieder zum Südpol befördert muss $|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle)$ sein. Analog zu Aufgabenteil (b) muss dann gelten:

$$\Delta_n = \frac{1}{T}(\pi + 2\pi n) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Damit liegt das erste Minimum von $|c_e|^2$ nach der vollen Sequenz bei $\Delta = 2\pi\Delta_f = \frac{\pi}{T}$. Die somit erreichte relative Genauigkeit auf der Frequenz des Zeitstandards liegt somit bei

$$\frac{\Delta_f}{f} = \frac{1 \text{ Hz}}{9192631770 \text{ Hz}} \approx 10^{-10}$$