

Übungsblatt 12 Lösung

12.1 Doppler-freie Sättigungsspektroskopie

(a) Betrachten Sie die D₂-Linie von Natrium, also den Übergang von $3^2S_{1/2}$ zu $3^2P_{3/2}$, bei einer Wellenlänge von $\lambda = 589.158 \text{ nm}$. Die Lebensdauer des $3^2P_{3/2}$ Zustandes beträgt $\tau = 16 \text{ ns}$. Berechnen Sie die natürliche Linienbreite und vergleichen Sie diese mit der Dopplerbreite von Natriumdampf bei 500 K. Was schließen Sie daraus? Vergleichen Sie dies auch mit der Hyperfeinaufspaltung.

(b) Eine Methode der Doppler-freien Sättigungsspektroskopie nutzt zwei Laserstrahlen, die antiparallel durch das Gas propagieren. Erklären Sie (mit Skizze) warum man bei dieser Methode Doppler-freie Spektren erhält. Ein schwaches Magnetfeld sei entlang der Strahlenachse ausgerichtet und man betrachte den Übergang zwischen einem $J = 1$ und einem $J = 2$ Niveau. Was muss man bei der Intensität und Polarisierung der beiden Strahlen beachten?

Lösung:

(a) Die natürliche Linienbreite ist $\Gamma = 1/\tau = 62 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} = 2\pi \cdot 10 \text{ MHz}$. Die Dopplerbreite wiederum ist gegeben durch

$$\Gamma_D = \frac{f_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (1)$$

Mit einer Masse $m_{\text{Na}} = 23 u$ und der Boltzmann-Konstanten $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ erhält man $\Gamma_D \sim 0.72 \text{ GHz}$. Da die Dopplerbreite um Größenordnungen breiter ist als die natürliche Linienbreite, ist letztere mit gewöhnlichen spektroskopischen Methoden nicht auflösbar. Die Hyperfeinaufspaltung des $3^2S_{1/2}$ Zustandes beträgt etwa 1.77 GHz, ist also noch auflösbar, während die Aufspaltung zwischen den Hyperfeinzuständen ($F = 0$ und $F = 3$) des $3^2P_{3/2}$ Zustandes etwa 109 MHz beträgt. Für letztere benötigt man eine Methode der Doppler-freien Sättigungsspektroskopie.

(b) Zur Beschreibung der Doppler-freien Sättigungsspektroskopie siehe Skizze. Bei den Laserstrahlen ist zu beachten, dass die Intensität des Sättigungsstrahls deutlich höher ist als die des Abfragestrahls. Weiterhin sollte der Sättigungsstrahl zirkular polarisiert sein, z.B. σ^+ um Atome aus dem $J = 1, m_J = 1$ in den $J = 2, m_J = 2$ Zustand anzuregen.

12.2 Laserpulse

In einem Titan-Saphir-Laser (Ti:Sa) können durch Modenkopplung kurze Pulse im fs-Bereich erzeugt werden. Dabei befinden sich viele Eigenmoden des Laser-Resonators über der Laserschwelle. Nehmen Sie an, der Laser bestehe aus einem Fabry-Pérot-Resonator der Länge $L = 0.5 \text{ m}$ und dem Ti:Sa-Kristall in der Mitte. Dieser soll als dispersionslos angenommen werden.

(a) Wie groß ist der Frequenzabstand $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$ zweier benachbarter Eigenmoden des Laserresonators? Berechnen Sie die Ordnung n_0 , für die das emittierte Licht eine Wel-

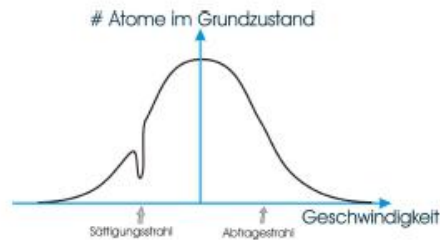


Abbildung 4.1: Der Sättigungs- und der Abfragestrahl brennen Löcher an den Stellen in die Verteilungsfunktion, bei denen die dopplerverschobene Resonanzfrequenz der Atome und die Laserfrequenz übereinstimmen.

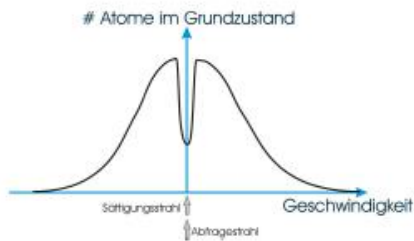


Abbildung 4.2: Der Sättigungsstrahl pumpt (fast) alle Atome mit $v_x = 0$ in den angeregten Zustand. Der Abfragestrahl sieht (fast) keine Atome im Grundzustand mehr und wird nicht absorbiert.

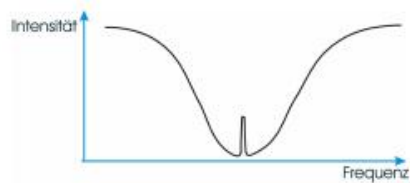


Abbildung 4.3: Absorptionslinie mit Lambdip

längle von 800 nm hat.

(b) Ohne Modenkopplung schwingen die Eigenmoden über der Laserschwelle spontan mit einer zufälligen Phase φ_n an. Erzeugen Sie mit dem Numerikprogramm ihrer Wahl (z.B. Matlab, Octave, Mathematica, Maple) einige Zufallszahlen für φ_n im Bereich von 0 bis 2π und plotten Sie die Summe

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+N} \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

für $N = 0, 1, 20, 100$ im Bereich von 0 bis $3 \cdot 2\pi/\Delta\omega$. Was ist zu beobachten? Wie verändert sich das Verhalten für $\varphi_n = 0$ (Modenkopplung)? Wie und warum verändert sich die Struktur mit steigendem N? Wie hoch ist die Repetitionsrate?

(c) Schätzen Sie die Anzahl Resonatormoden ab, die benötigt werden, um einen Puls im Femtosekundenbereich (10^{-15} s) zu erzeugen. Überlegen Sie sich dazu das Fourier-Spektrum der obigen Summe für $\varphi_n = 0$. Ti:Sa hat ein sehr breites Gain-Profil. Erfüllt es die Anforderungen für einen fs-Laser?

Lösung:

(a) Die Eigenfrequenzen des Laserresonators haben einen Abstand von einem freien Spektralbereich des Fabry-Pérot-Resonators. Das ergibt

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{c}{2L} \approx 2\pi \cdot 300 \text{ MHz}$$

Die Ordnung, für die $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ berechnet sich aus

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} = n_0 \cdot 2\pi \frac{c}{2L} \Rightarrow n_0 = \frac{2L}{\lambda_0} = 1250000$$

(b) Beispiel in Matlab (hier nur die zufällige Phase, für das Modelocking phin jeweils durch Null ersetzen):

```
c=299792458;
L=0.5;
deltaOm = 2*pi*c/(2*L);
lambda0 = 800e-9;
n0 = 2*L/lambda0;
t = linspace(0,3*(2*pi)/deltaOm,10000);

phin = 2*pi*rand(1,10000);

figure(1); clf;
SumVal = sin(n0*deltaOm*t+phin(1));
subplot(2,2,1);
plot(t/(2*pi/deltaOm),SumVal);
title('N=0'); xlabel('t/[2\pi/\Delta\omega]'); ylabel('Amplitude');

for k=1:1
    SumVal = SumVal + sin((n0+k)*deltaOm*t+phin(k+1));
```

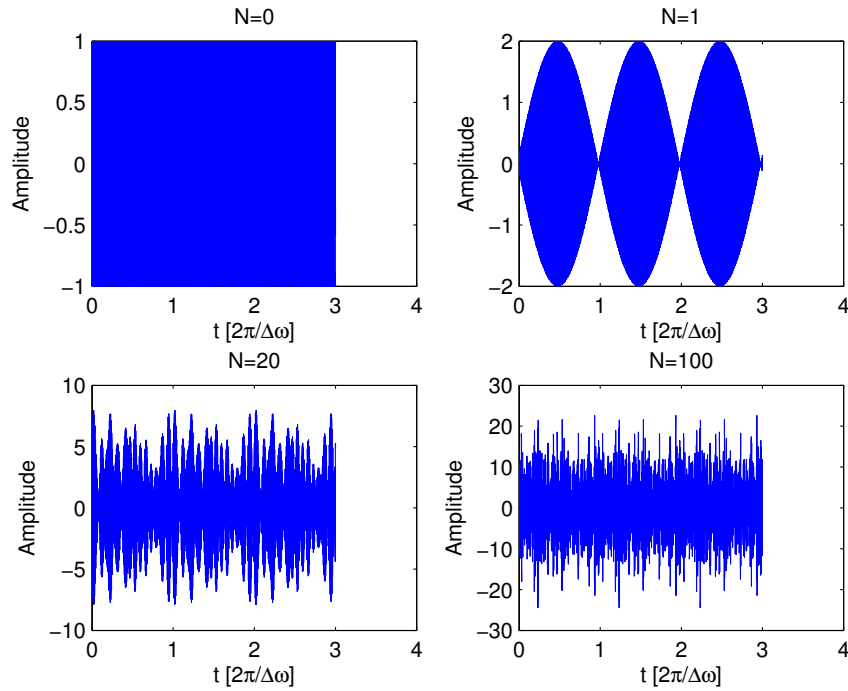


Abbildung 1: Zufällige Phase

```

end
subplot(2,2,2);
plot(t/(2*pi/deltaOm),SumVal);
title('N=1');xlabel('t_ [2\ pi /\ Delta\ omega] ');ylabel('Amplitude');

for k=2:20
    SumVal = SumVal + sin((n0+k)*deltaOm*t+phin(k+1));
end
subplot(2,2,3);
plot(t/(2*pi/deltaOm),SumVal);
title('N=20');xlabel('t_ [2\ pi /\ Delta\ omega] ');ylabel('Amplitude');

for k=21:100
    SumVal = SumVal + sin((n0+k)*deltaOm*t+phin(k+1));
end
subplot(2,2,4);
plot(t/(2*pi/deltaOm),SumVal);
title('N=100');xlabel('t_ [2\ pi /\ Delta\ omega] ');ylabel('Amplitude');

```

Man beobachtet für die zufällige Phasenlage ein zunehmendes Ausschmieren der Strukturen für steigendes N und eine Schwebung der zwei Frequenzen mit zufälliger Phasenlage für $N=1$. Im Fall $\varphi_n = 0$ erhält man eine Pulsfolge. Die Pulsdauer sinkt mit steigendem N während der zeitliche Abstand der Pulse konstant bleibt. Die Repetitionsrate beträgt $\Delta\omega/(2\pi)$, d.h. die Zeit zwischen zwei Pulsen beträgt $2\pi/\Delta\omega$

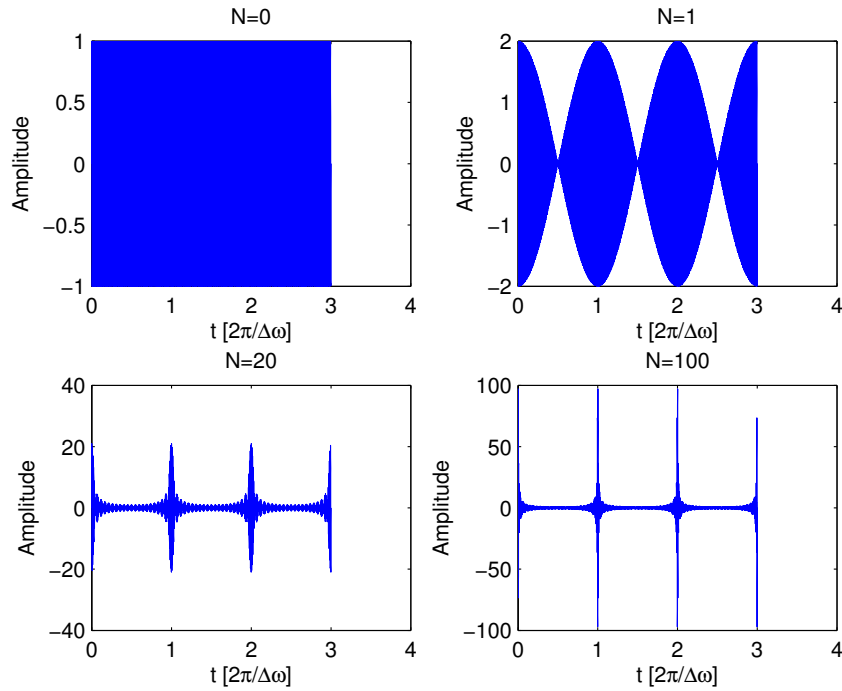


Abbildung 2: Phase = 0

(c) Um das Fourierspektrum der Summe

$$s(t) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N} \sin(\omega_n t)$$

zu interpretieren brauchen wir ein paar Eigenschaften und Korrespondenzen der Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega &\circ\text{---} G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \\ \sin(\omega_n t) &\circ\text{---} \sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega - \omega_n) - \delta(\omega + \omega_n)}{2i} \\ \sqrt{2\pi} G(\omega) H(\omega) &\circ\text{---} (g * h)(t) \quad (\text{Multiplikation} \circ\text{---} \text{Faltung}) \\ e^{iat} g(t) &\circ\text{---} G(\omega - a) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Delta\omega) &\circ\text{---} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \frac{2\pi}{\Delta\omega}) \\ \text{rect}(\frac{1}{a}\omega) &\circ\text{---} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\frac{a}{2}t) \end{aligned}$$

Direkte Anwendung der Sinus-Trafo ergibt für das Spektrum

$$s(t) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N} \sin(\omega_n t) \quad \circ\text{---} \quad S(\omega) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N} \sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega - \omega_n) - \delta(\omega + \omega_n)}{2i}$$

Dies lässt sich schreiben als unendliche Summation über äquidistante Deltafunktionen im Frequenzbereich, die durch die Rechteckfunktion rect beschränkt wird ($a = (N + 1)\Delta\omega$; $\omega_m = (n_0 + \frac{N}{2})\Delta\omega$):

$$S(\omega) = \left[\text{rect} \left(\frac{1}{a}(\omega - \omega_m) \right) - \text{rect} \left(\frac{1}{a}(\omega + \omega_m) \right) \right] \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Delta\omega) = \text{RectTeil}(\omega) \cdot \text{SumTeil}(\omega)$$

Die Rücktransformation der rect-Funktionen anhand der Regel für die Verschiebung und der Korrespondenz der rect-Funktion ergibt:

$$\text{RectTeil}(\omega) \quad \longrightarrow \quad 2i \sin(\omega_m t) \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{a}{2}t\right)$$

Aus dem Delta-Peak-Spektrum ergibt sich eine Delta-Pulsfolge im Zeitbereich:

$$\text{SumTeil}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Delta\omega) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2i} \frac{2\pi}{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)$$

Zusammengesetzt ergibt sich im Zeitbereich:

$$s(t) = \left[\sin(\omega_m t) (N + 1) \text{sinc}\left(\frac{a}{2}t\right) \right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)$$

Ausführen der Faltung liefert

$$s(t) = (N + 1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\omega_m \left(t - n \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)\right) \text{sinc}\left(\frac{a}{2}\left(t - n \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)\right)$$

Dies entspricht einer unendlichen Folge aus $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ -förmigen Pulsen. Der Abstand der ersten Nullstellen symmetrisch um ein einzelnes Maximum beträgt

$$\Delta t = \frac{4\pi}{(N + 1)\Delta\omega}$$

Die Anzahl N_{ben} benötigter Resonatormoden für eine gegebene Pulslänge Δt ergibt sich somit zu

$$N_{\text{ben}} = \frac{4\pi}{\Delta t \Delta\omega} - 1$$

Für eine Pulslänge von 10 fs ergibt sich $N_{\text{ben}} \approx 6.7 \cdot 10^5$, was auf 800 nm einer spektralen Breite von etwa 40 nm entspricht. Dies ergibt sich aus der kleinsten benötigten Wellenlänge

$$\lambda_{\text{min}} = 2\pi \frac{c}{(n_0 + N_{\text{ben}})\Delta\omega} \approx 760 \text{ nm} \quad (2)$$

Ti:Sa hat eine Gain-Bandbreite von über 100 nm, ist also für diesen Einsatz bestens geeignet. Limitierende Faktoren sind in Wirklichkeit dispersive Elemente wie dielektrische Spiegel.

12.3 Zeeman-Slower

Wenn man Atome zu sehr niedrigen Temperaturen kühlt, spielen Quanteneffekte eine immer größere Rolle und es treten interessante Effekte wie z.B. die Bose-Einstein-Kondensation

(BEC) auf. In vielen BEC-Experimenten wird ein Zeeman-Slower als erstes Kühlstadium für die Atome verwendet. Bei einem solchen Aufbau wird einem thermischen Atomstrahl ein Laserstrahl entgegengeschickt, dessen Frequenz so gewählt wird, dass die Atome trotz Dopplerverschiebung dessen Licht absorbieren. Da die Atome nur aus einer Richtung Licht absorbieren, aber in alle Raumrichtungen emittieren, wird der Atomstrahl durch den Laserstrahl abgebremst.

Allerdings ändert sich die Dopplerverschiebung der Atome mit abnehmender Geschwindigkeit und somit absorbieren die langsamer werdenden Atome immer weniger Photonen und die Kühleffizienz des Zeeman-Slowers nimmt ab. Dieser Effekt kann vermieden werden, indem man z.B. ein Magnetfeld so konzipiert, dass Atome, die sich entlang des Laserstrahls bewegen, auf Grund des Zeeman-Effektes immer resonant mit dem Laserstrahl sind und somit über die ganze Strecke des Zeeman-Slowers effizient abgebremst werden.

a) Berechnen Sie die Änderung der kinetischen Energie von Positronium, Lithium (${}^6\text{Li}$) und Rubidium (${}^{87}\text{Rb}$) durch Absorption eines Photons, für den Fall, dass sich das Atom zuvor in Ruhe befindet. Berechnen Sie dafür die Photonenwellenlänge im Fall des Positroniums anhand des Bohrschen Atommodells und verwenden Sie für Lithium und Rubidium deren D_2 -Linie.

b) Berechnen Sie die Photonenanzahl, die Natriumatome absorbieren müssen, damit sie komplett abgebremst werden, wenn ihre Anfangsgeschwindigkeit 600 m/s beträgt und die D_2 -Linie ($\lambda = 589.158\text{ nm}$) zur Kühlung verwendet wird.

c) Der Zeeman-Slower sei so konzipiert, dass die Atome auf einer Länge von 1 m gleichmäßig von 600 m/s auf 50 m/s abgebremst werden. Berechnen Sie dazu zu erst die ortsabhängige Geschwindigkeit der Atome. Bestimmen Sie daraus das nötige ortsabhängige Magnetfeld für den Fall, dass der Laser resonant und geeignet polarisiert ist, so dass nur der Übergang von $3^2S_{1/2}(m_j = 1/2, g_j = 2)$ nach $3^2P_{3/2}(m_j = 3/2, g_j = 4/3)$ angeregt wird.

Tipp: Die Dopplerverstimmung ist in erster Näherung durch $\delta_{\text{Doppler}} = v/\lambda$ gegeben.

Lösung:

(a) Positronium: Für den Impuls eines Photons gilt:

$$p_{\text{Photon}} = \frac{E_{\text{Photon}}}{c}. \quad (3)$$

Nach dem Bohrschen Atommodell ergibt sich für die Energie des Photons:

$$E_{\text{Photon}} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \frac{m_{\text{red}} e^4}{8\pi\epsilon_0^2 \hbar^2} = \frac{3}{8} E_{\text{Ryd}} \quad (4)$$

und damit für die kinetische Energie des Positroniums:

$$E_{\text{kin,Pos}} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_{\text{Pos}}} = \frac{9}{256} \frac{E_{\text{Ryd}}^2}{m_{\text{Elek}} c^2} = 1.27 \cdot 10^{-5} \text{ eV}. \quad (5)$$

Lithium und Rubidium: Für den Impuls eines Photons gilt:

$$p_{\text{Photon}} = \frac{h}{\lambda}. \quad (6)$$

Damit folgt für die kinetische Energie des Lithiumatoms ($\lambda_{Li,D_2} = 670.977nm$):

$$E_{kin,Li} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_{Li}} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\lambda_{Li}^2 m_{Li}} = 3.06 \cdot 10^{-10} eV. \quad (7)$$

Und für Rubidium ($\lambda_{Rb,D_2} = 780.241nm$):

$$E_{kin,Rb} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\lambda_{Rb}^2 m_{Rb}} = 1.56 \cdot 10^{-11} eV. \quad (8)$$

(b) Die Anzahl der benötigten Photonen lässt sich über die Impulserhaltung berechnen ($m_{Na} = 23u$)

$$N = \frac{p_{Na}}{p_{Photon}} = \frac{mv\lambda}{h} = 20369. \quad (9)$$

(c) Da es sich um eine gleichmäßig verzögerte Bewegung handelt, gilt für die Geschwindigkeit bzw. die Position der Atome:

$$v(t) = v_0 - at \quad (10)$$

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} at^2, \quad (11)$$

wobei $v_0=600m/s$. Aus Gleichung (11) ergibt sich:

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2ax}}{a} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2ax}}{a}. \quad (12)$$

Und damit mit Gleichung (10):

$$v(x) = v_0 - \left(v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2ax} \right) = \sqrt{v_0^2 - 2ax}. \quad (13)$$

Nach dem Passieren des Slowers der Länge $L=1m$ sollen die Atome laut Aufgabenstellung auf $v_E=50m/s$ abgebremst sein. Daher ergibt sich für die Beschleunigung a :

$$a = \frac{v_0^2 - v_E^2}{2L} = 178750 \frac{m}{s^2}. \quad (14)$$

Das Magnetfeld des Zeeman-Slowers ergibt sich nun aus der Bedingung, dass die Dopplerverschiebung der Atome $\delta_{Doppler} = \frac{v}{\lambda}$ durch den Unterschied der Zeeman-Verschiebung zwischen dem Grundzustand und dem angeregten Zustand ausgeglichen werden soll

$$\delta_{Doppler} = \delta_{Zeeman} \quad (15)$$

,wobei

$$\delta_{Zeeman} = \frac{\mu_B}{h} [m_j^e g_j^e - m_j^g g_j^g] B = \frac{\mu_B}{h} B. \quad (16)$$

Daraus ergibt sich das Magnetfeld zu:

$$B(x) = \frac{h}{\mu_B \lambda} v(x) = \frac{h}{\mu_B \lambda} \sqrt{v_0^2 - 2ax} = 72.8 mT \sqrt{1 - 0.993x[m]} \quad (17)$$