

# Magische Zahlen

Pflichtseminar: Schlüsselexperimente der Teilchenphysik

Gesa Berthold

04.12.2015

# Magische Zahlen

**20**

**8**

**82**

**2**

**126**

**28**

→ Kernphysik

# Gliederung

- Grundlagen
- Magische Zahlen
- Experimentelle Methoden
- Entdeckung
- Erklärung
- Ausblick

# Grundlagen

- Kern besteht aus Nukleonen (Protonen, Neutronen)

$$A = Z + N$$

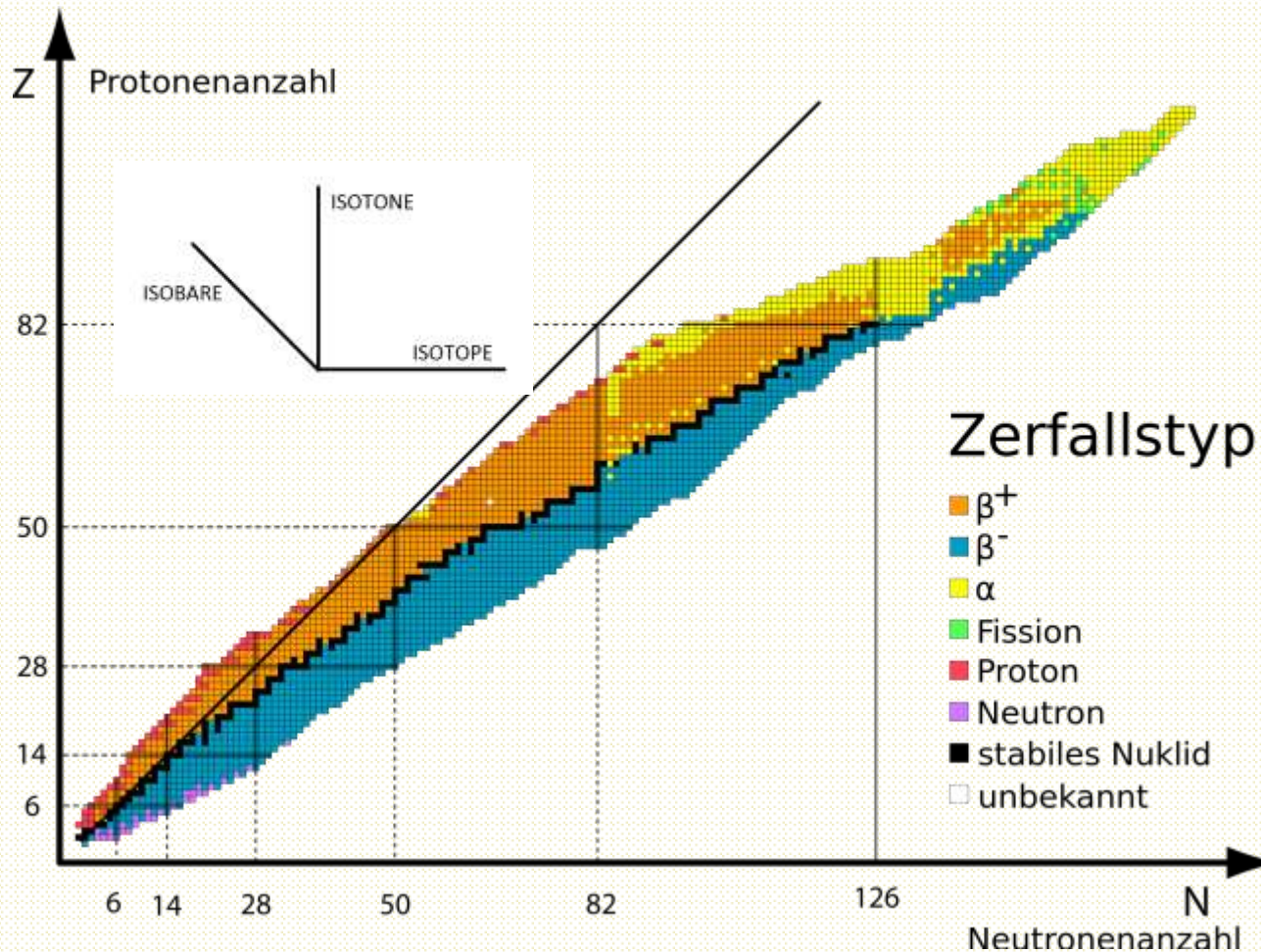
A: Anzahl Nukleonen

Z: Anzahl Protonen

N: Anzahl Neutronen

- Isobare: gleiche Anzahl Nukleonen (A)
- Isotope: gleiche Anzahl Protonen (Z)
- Isotone: gleiche Anzahl Neutronen (N)

# Grundlagen - Nuklidkarte



[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/db/Isotopentabelle\\_Segre.svg/2000px-Isotopentabelle\\_Segre.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/db/Isotopentabelle_Segre.svg/2000px-Isotopentabelle_Segre.svg.png)

# Grundlagen – Das Tröpfchenmodell

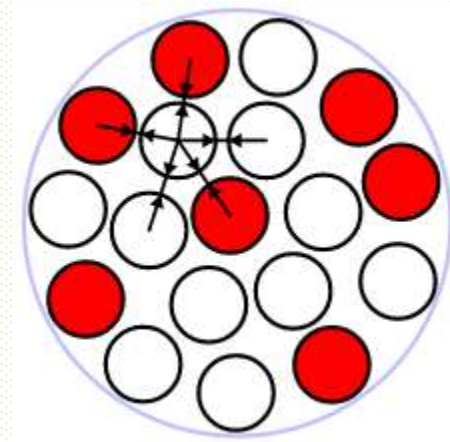
- 1935: G. Gamov
- Atomkern entspricht Flüssigkeitstropfen
- konstanter Massendichte
- Verformbar aber Volumen bleibt gleich → Tropfen
- Existenz der starken Kernkraft bekannt, noch nicht verstanden

# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel

- Bindungsenergie: Energie zur Spaltung von Kernen in Z Protonen und N Neutronen
- **1. Volumenanteil**
  - Anziehende Kernkräfte mit kurzer Reichweite
  - Von Anzahl der Nukleonen abhängig

$$\rightarrow E_B \sim A \qquad \rightarrow V \sim A$$

$$\rightarrow E_{B,1} = a_V * A$$

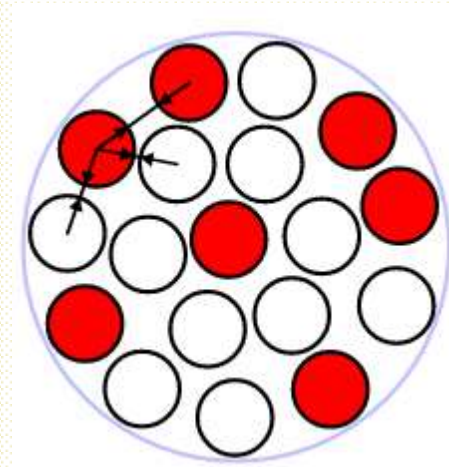


# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel

## ▪ 2. Oberflächenanteil

- $E_B$  für Nukleonen an der Oberfläche  $F$  kleiner als im Zentrum
- Wir nehmen an:  $V \sim A$  mit  $V \sim r^3$
- Daraus folgt  $A^{2/3} \sim F$

$$\rightarrow E_{B,2} = -a_s * A^{2/3}$$

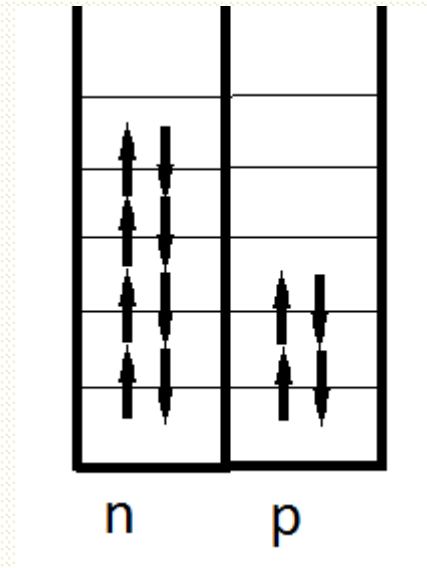
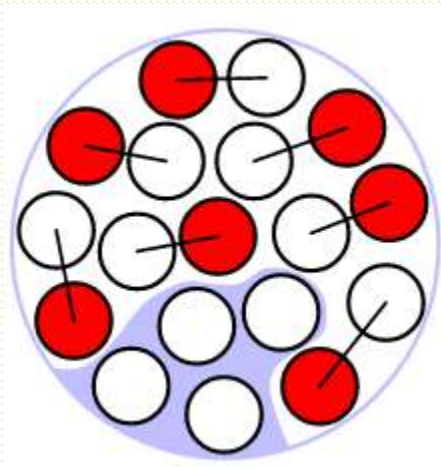


# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel

## ▪ 3. Symmetrieanteil

- Neutronenüberschuss destabilisiert Kern

$$\rightarrow E_{B3} = -a_F * \frac{(Z-N)^2}{A}$$



# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel

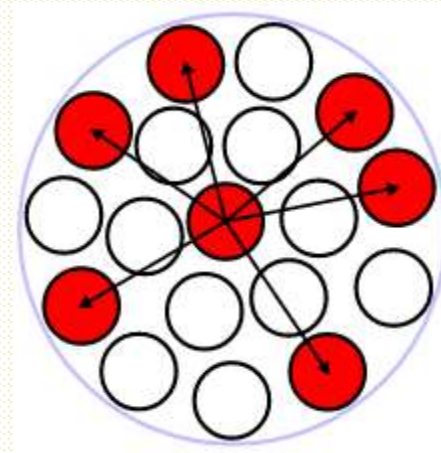
## ▪ 4. Coulombanteil

- Coulombsche Abstoßung zwischen Protonen

- $E \sim q^2 \sim \frac{1}{r}$

- $r \sim V^{1/3} \sim A^{1/3}$

$$\rightarrow E_{B4} = -a_c * Z^2 / A^{\frac{1}{3}}$$



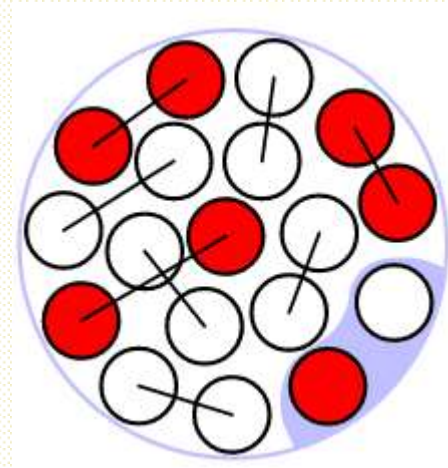
# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel

## ▪ 5. Paarungsanteil

- Gerade Anzahl von Protonen und Neutronen stabler (noch nicht erklärbar)

$$\rightarrow E_{B5} = a_p * A^{-\frac{1}{2}} * \delta$$

$$\text{mit } \delta = \begin{cases} +1 & gg \\ 0 & ug, gu \\ -1 & uu \end{cases}$$



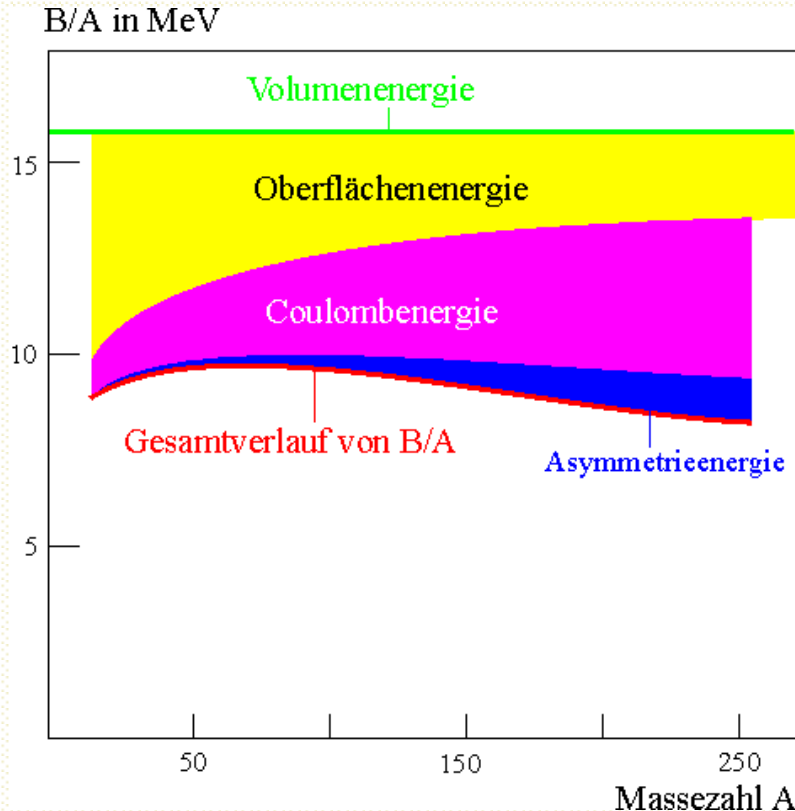
Quelle Bilder: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/25/Tr%C3%B6pfchenmodell.svg/765px-Tr%C3%B6pfchenmodell.svg.png>

# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel

- Ergebnis

$$E_B = a_V * A - a_S * A^{2/3} - a_F * \frac{(Z - N)^2}{A} - a_C * \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_P * A^{-1/2} * \delta$$

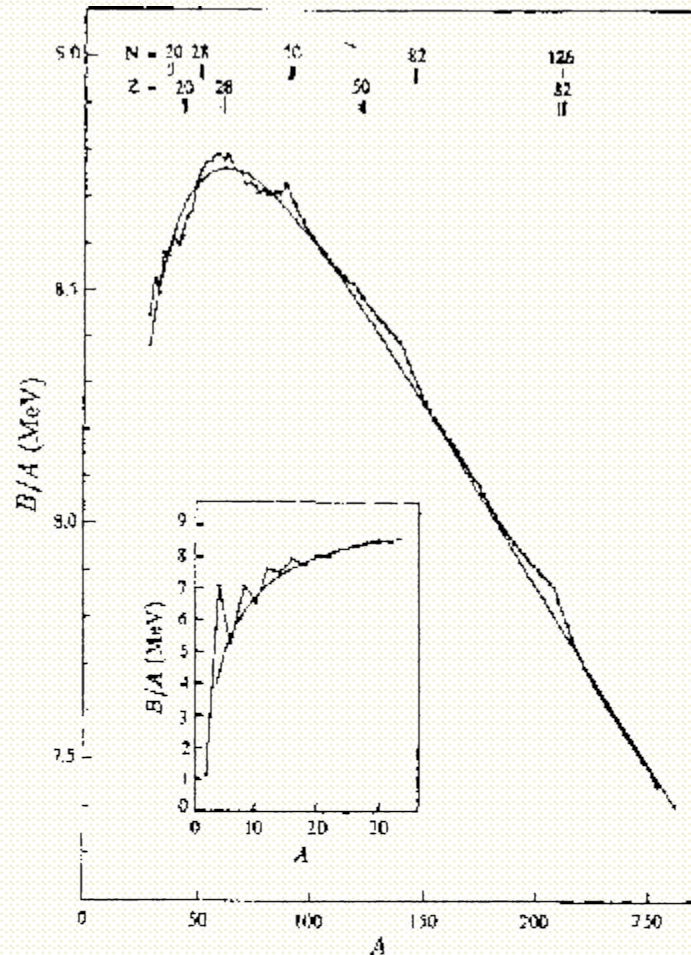
# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel



- $E_{B,1} = a_V * A$
- $E_{B,2} = -a_S * A^{2/3}$
- $E_{B,3} = -a_F * \frac{(Z-N)^2}{A}$
- $E_{B,4} = -a_c * Z^2 / A^{1/3}$
- $E_{B,5} = a_p * A^{-1/2} * \delta$

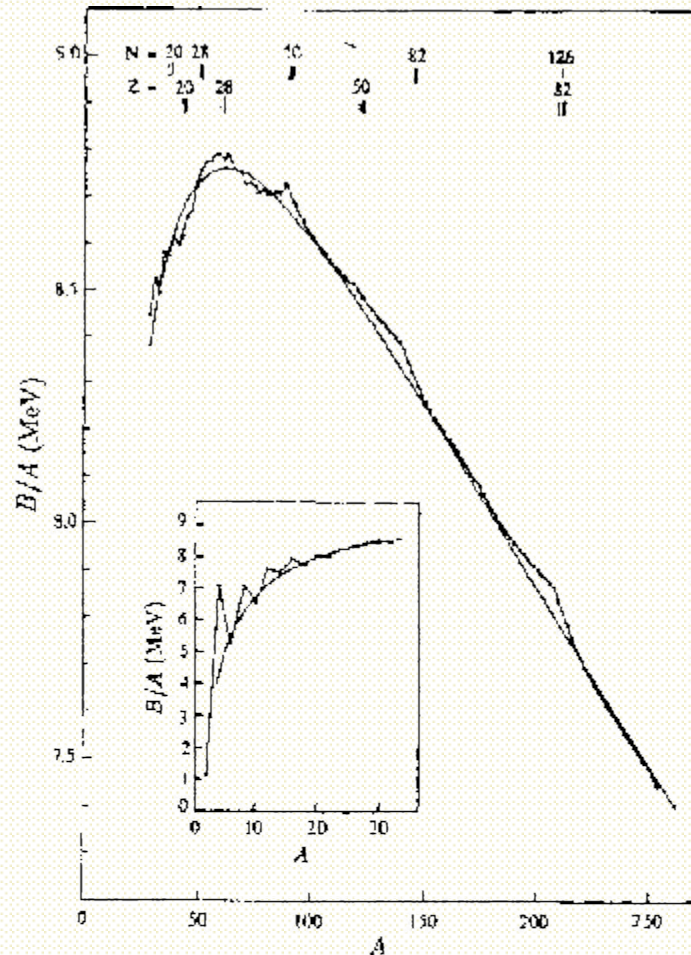
[http://www.leifiphysik.de/sites/default/files/medien/tropfmodell1\\_kernphygrundlagen\\_gru.gif](http://www.leifiphysik.de/sites/default/files/medien/tropfmodell1_kernphygrundlagen_gru.gif)

# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel



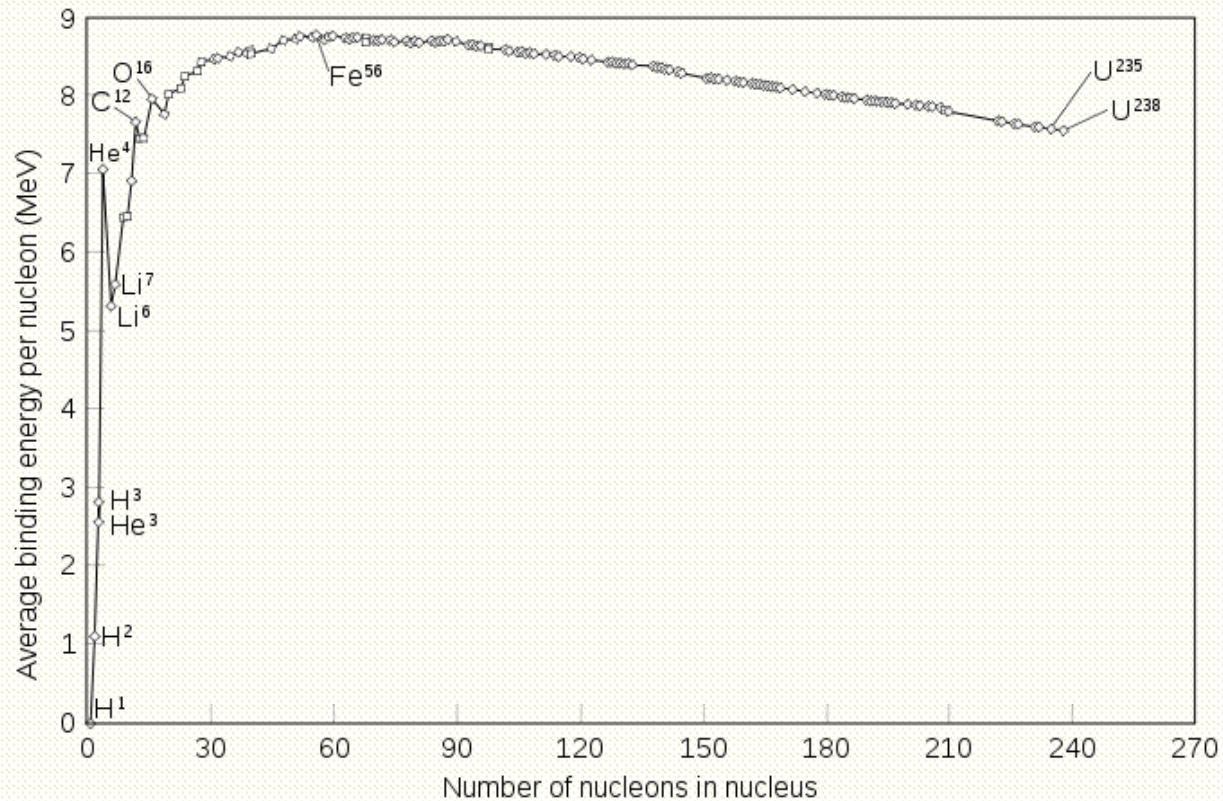
- $E_{B,1} = a_V * A$
- $E_{B,2} = -a_S * A^{2/3}$
- $E_{B,3} = -a_F * \frac{(Z-N)^2}{A}$
- $E_{B,4} = -a_C * Z^2 / A^{1/3}$
- $E_{B,5} = a_p * A^{-1/2} * \delta$

# Grundlagen – Bethe-Weizsäcker-Formel



- Konstanten empirisch bestimmt
  - $a_V = 15,67 \text{ MeV}$
  - $a_S = 17,23 \text{ MeV}$
  - $a_F = 23,22 \text{ MeV}$
  - $a_C = 0,71 \text{ MeV}$
  - $a_p = \pm 11,2 \text{ MeV}$

# Magische Zahlen

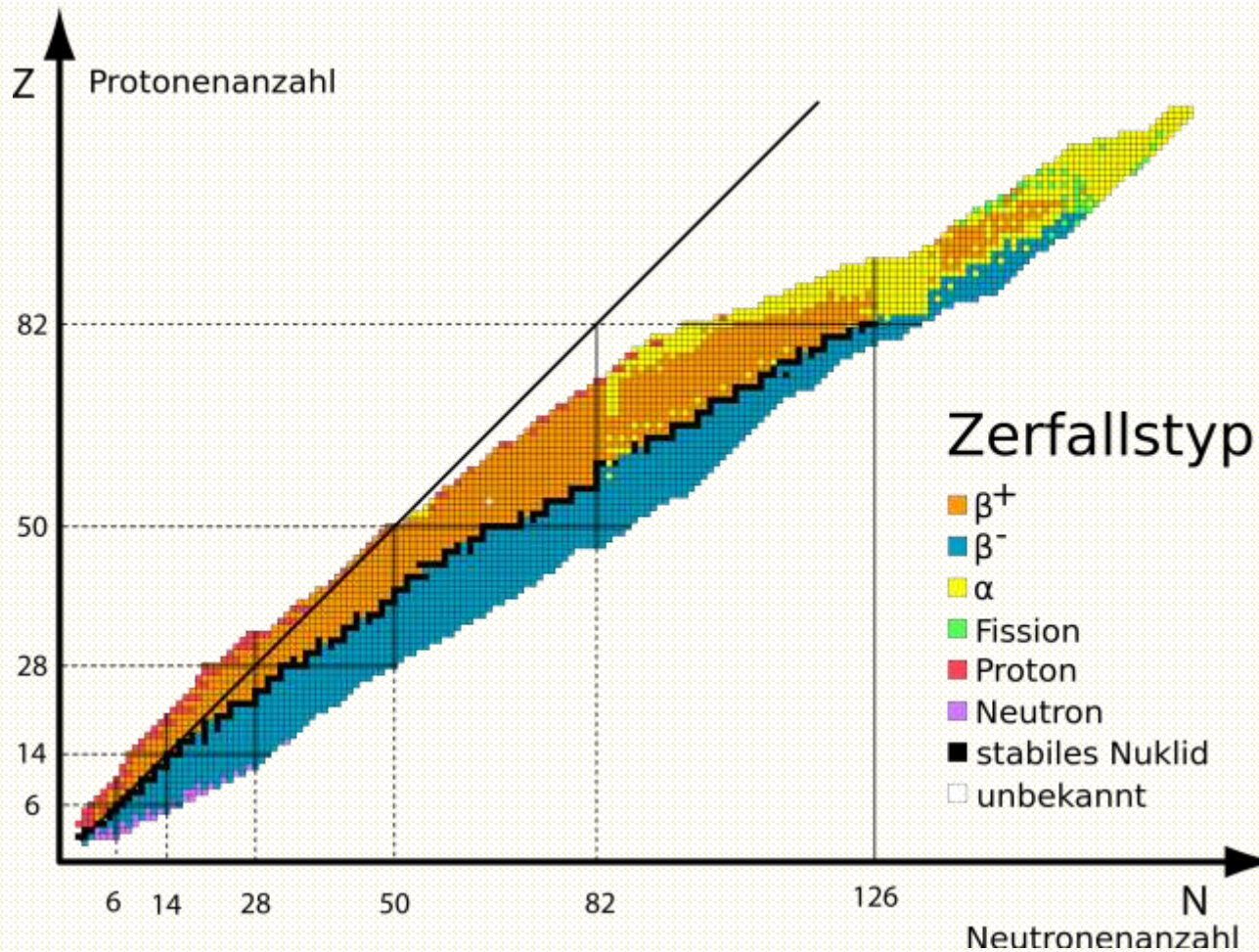


<http://www.raumfahrer.net/forum/yabbfiles/Attachments/up009597.png>

# Magische Zahlen

- Bestimmte Anzahl Neutronen oder Protonen
- 2, 8, 20, 28, 50, 82, (114), 126
- 114, 164 vermutet für Protonen
- 184, 196, 236, 318 vermutet für Neutronen
- Eigenschaften:
  - Hohe Bindungsenergie
  - Relativ häufig
  - Hohe Stabilität, lange Halbwertszeit
  - Viele stabile Isotone
  - Minimales Quadrupolmoment
- Doppelt magisch, wenn  $Z$  und  $N$  magisch

# Grundlagen - Nuklidkarte



[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/db/Isotopentabelle\\_Segre.svg/2000px-Isotopentabelle\\_Segre.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/db/Isotopentabelle_Segre.svg/2000px-Isotopentabelle_Segre.svg.png)

# Experimentelle Methoden

- Bekannte Massen-Energie-Beziehung  $E = mc^2$
- Masse des Kerns ist Summe der Nukleonenmassen plus Massendefekt

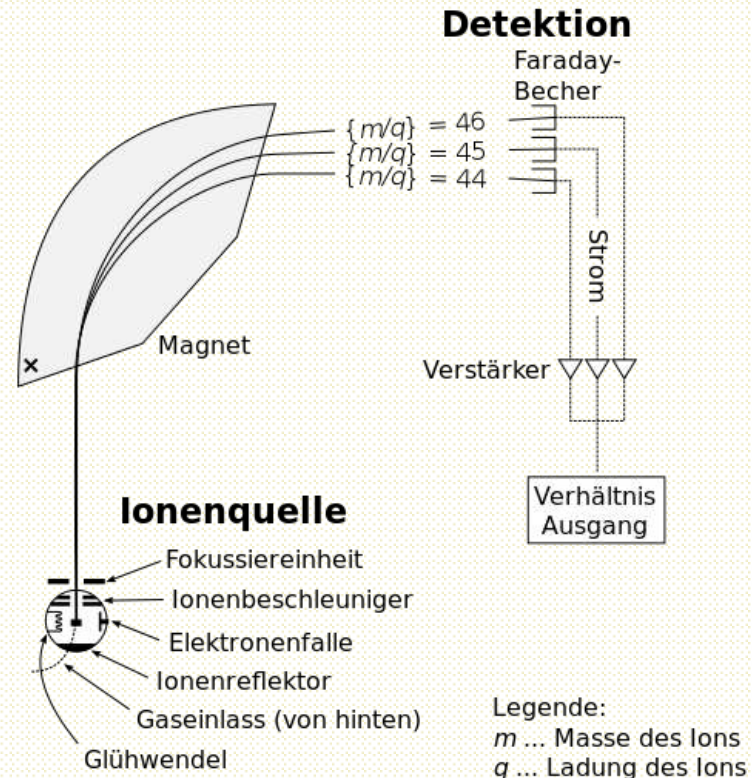
$$M = \sum m(Z) + \sum m(N) + \Delta m$$

$$\Delta m = E_B/c^2$$

- → Genaue Massenspektrometrie

# Exp. Methoden – Sektorfeldmassenspektrometer

- Probe wird in Ionenquelle ionisiert und beschleunigt
- Durch hom. Magnetfeld anhand ihres Masse-Ladungs-Verhältnis geteilt
- Elektronische Detektion
- Ionenstrahl muss im Hochvakuum verlaufen



[https://de.wikipedia.org/wiki/Massenspektrometrie#/media/File:Mass\\_Spectrometer\\_Schematic\\_DE.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Massenspektrometrie#/media/File:Mass_Spectrometer_Schematic_DE.svg)

# Exp. Methoden – Sektorfeldmassenspektrometer

- Alfred Nier (\*28.05.1911, †16.05.1994)



<http://www.minnesotainventors.org/inductees/images/alfred-o-c-nier.jpg>

# Exp. Methoden – Sektorfeldmassenspektrometer

- Alfred Nier (\*28.05.1911 †16.05.1994)

- Einfaches Prinzip:

- Lorentzkraft:

$$F_L = q * v * B$$

- Zentrifugalkraft:

$$F_Z = \frac{m * v^2}{r}$$

Ladung  $q = z * e$  und Elementarladung  $e$

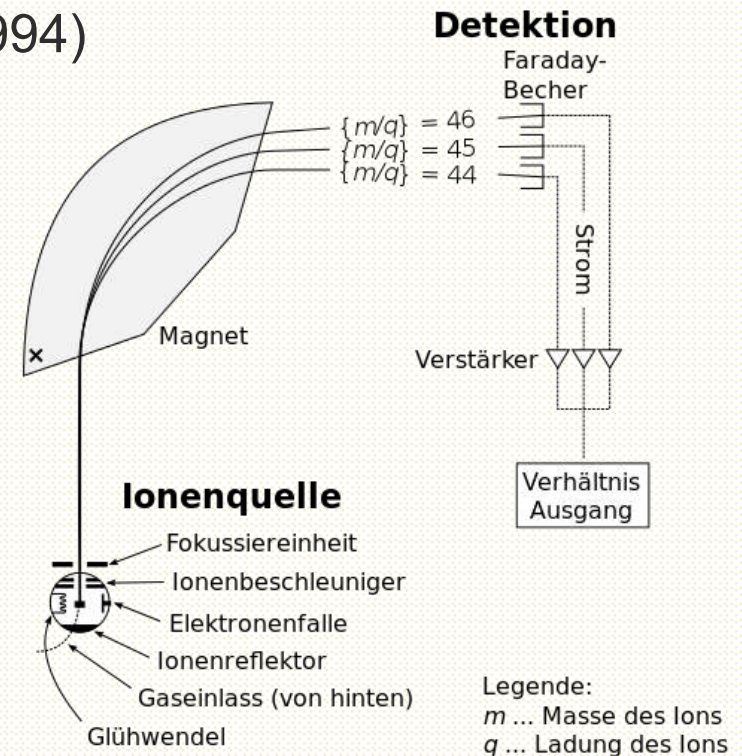
Geschwindigkeit des Ions  $v$

Magnetfeldstärke  $B$

Masse des Ions  $m$

Elektrische Feldstärke  $E$

Ablenkradius  $r$



[https://de.wikipedia.org/wiki/Massenspektrometrie#/media/File:Mass\\_Spectrometer\\_Schematic\\_DE.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Massenspektrometrie#/media/File:Mass_Spectrometer_Schematic_DE.svg)

# Exp. Methoden – Sektorfeldmassenspektrometer

- Alfred Nier (\*28.05.1911 †16.05.1994)

- Einfaches Prinzip:

- Lorentzkraft:

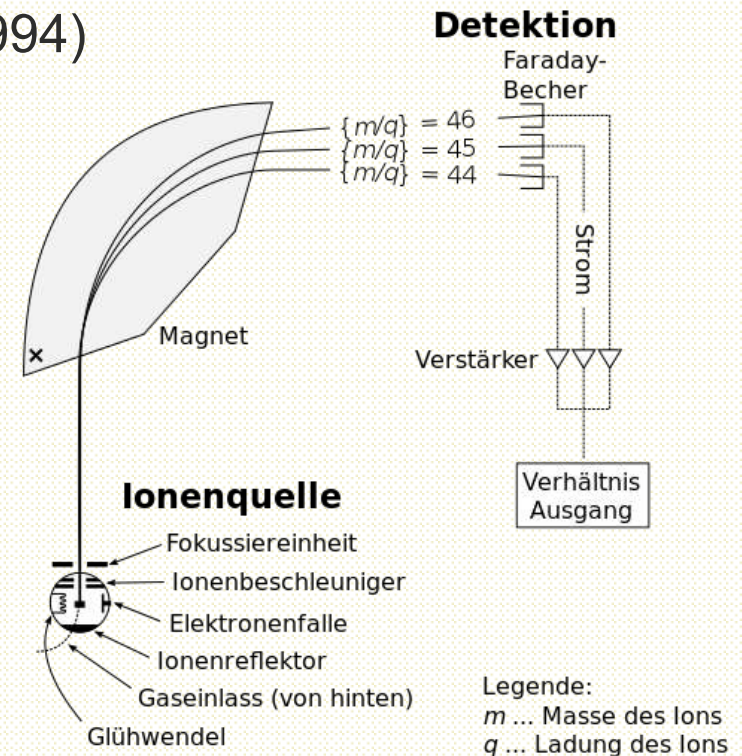
$$F_L = q * v * B$$

- Zentrifugalkraft:

$$F_Z = \frac{m * v^2}{r}$$

- Masse-Ladungsverhältnis:

$$\frac{m}{z} = \frac{r * e * B}{v} = \frac{r^2 * B^2}{2 * U}$$

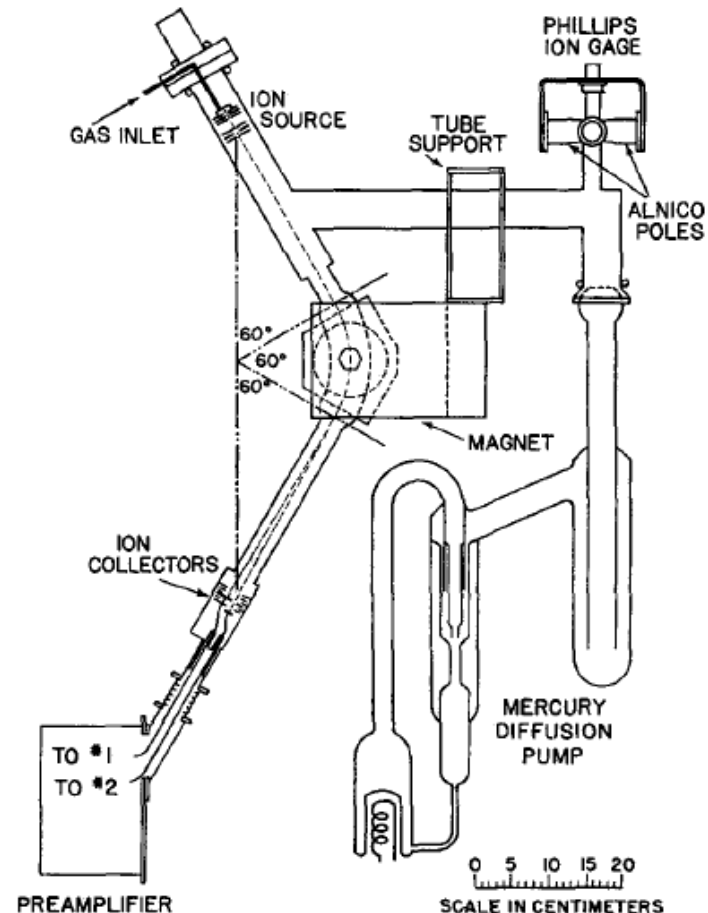


[https://de.wikipedia.org/wiki/Massenspektrometrie#/media/File:Mass\\_Spectrometer\\_Schematic\\_DE.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Massenspektrometrie#/media/File:Mass_Spectrometer_Schematic_DE.svg)

# Exp. Methoden – Sektorfeldmassenspektrometer

- 60° - Sektorfeld-Massenspektrometer (1947)
- Speziell für Massenbestimmung von Isotopen (C, O, N), aber auch mit anderen Elementen einsetzbar
- Hochvakuum durch eine Quecksilberdiffusionspumpe

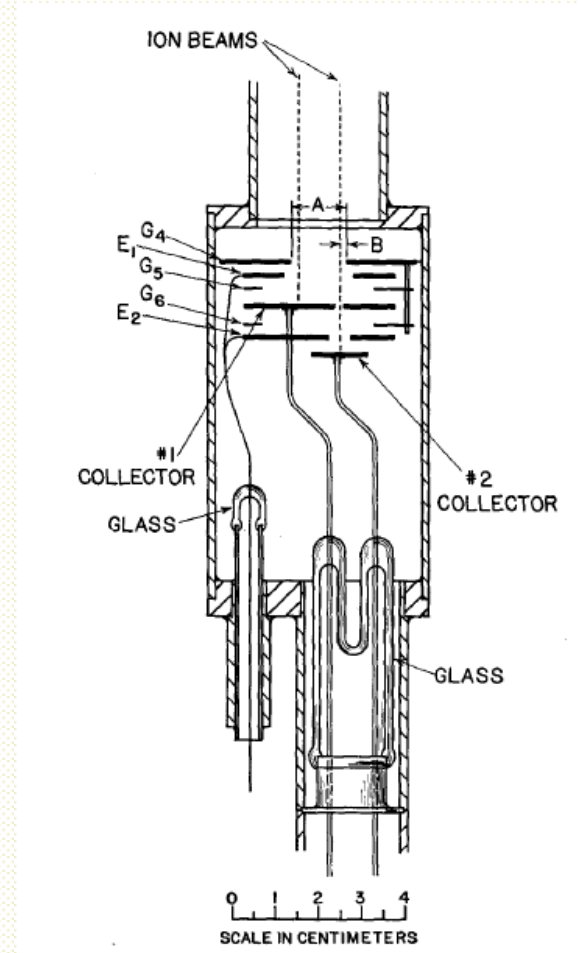
„Mass Spectrometer for Isotope and Gas Analysis“ Alfred O. Nier, 1947, Rev. Sci. Instr. 18, 6



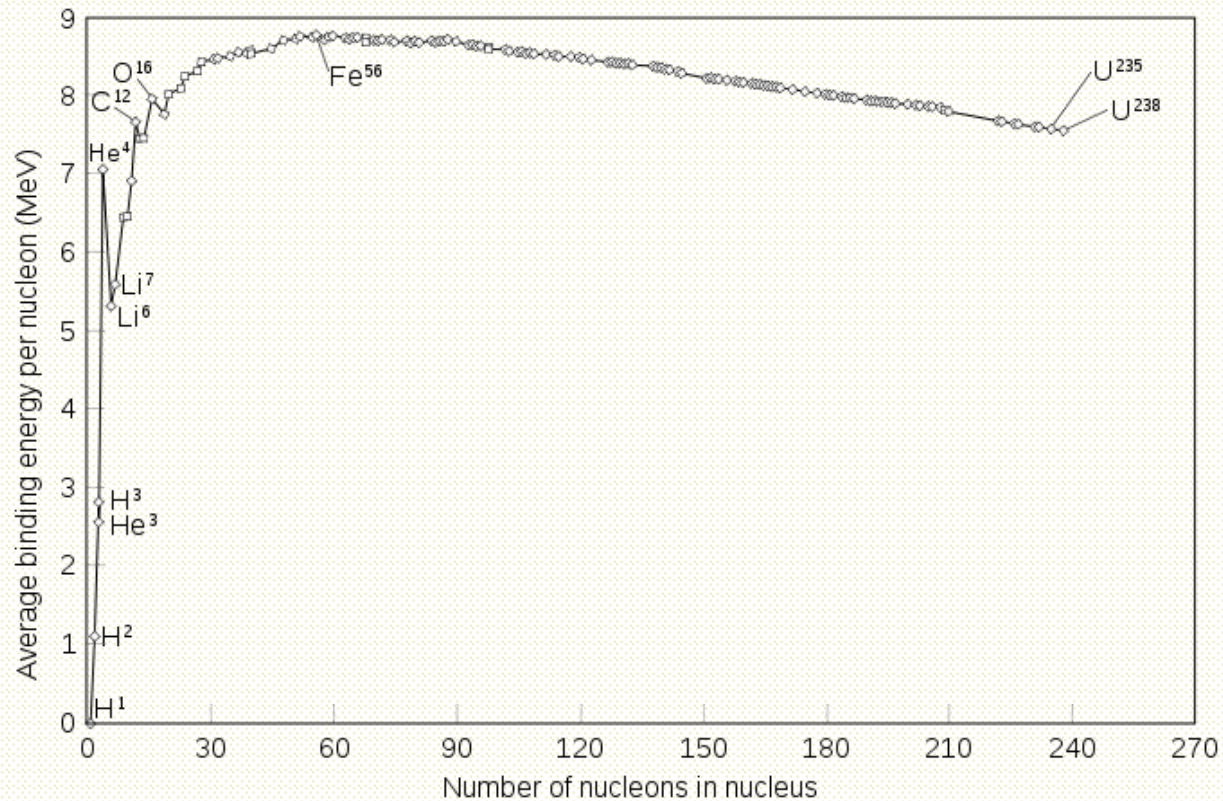
# Exp. Methoden – Sektorfeldmassenspektrometer

- 60° - Sektorfeld-Massenspektrometer (1947)
- Speziell für Massenbestimmung von Isotopen (C, O, N), aber auch mit anderen Elementen einsetzbar
- Hochvakuum durch eine Quecksilberdiffusionspumpe

„Mass Spectrometer for Isotope and Gas Analysis“ Alfred O. Nier, 1947, Rev. Sci. Instr. 18, 6



# Magische Zahlen



<http://www.raumfahrer.net/forum/yabbfiles/Attachments/up009597.png>

# Entdeckung

- Maria Goeppert-Mayer (\*28.06.1906, †20.02.1972)
- Anstoß: Enrico Fermi
  - Häufigkeit von Isotopen gezählt
  - → Nukleonenzahl ähneln sich
  - → magische Zahlen (1949)
- Neben Marie Curie die einzige Nobelpreisträgerin der Physik



<https://www.aip.org/history/acap/images/bios/mayerm.jpg>

# Entdeckung

- Zeitgleich Hans Jensen (\*25.06.1907, †11.02.1973)
- Magische Zahlen im Grunde bekannt, Erklärung ist eigentliche Entdeckung

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5c/Jensen.jpg/227px-Jensen.jpg>



# Entdeckung

- Zeitgleich Hans Jensen (\*25.06.1907, †11.02.1973)
- Magische Zahlen im Grunde bekannt, Erklärung ist eigentliche Entdeckung
- Anstoß: Experimentalphysiker Otto Haxel (\*02.04.1909, †26.02.1998)

<https://www.deutsche-digitale-bibliothek.de/binary/JSOCHGQN7GN26XSLVLZ3BF3OIH7A77AJ/full/1.jpg>



# Erklärung – Schalenmodell

- Ablösung des Tröpfchenmodells  
→ Vielteilchensystem
- 1955 von Maria Goeppert-Mayer und Hans Jensen:  
*„Elementary Theory of Nuclear Shell Structure“*  
→ Nobelpreis 1963 mit Eugene Wigner
- Schalenstruktur des Kerns
- Schalen von Protonen und Neutronen unabhängig voneinander

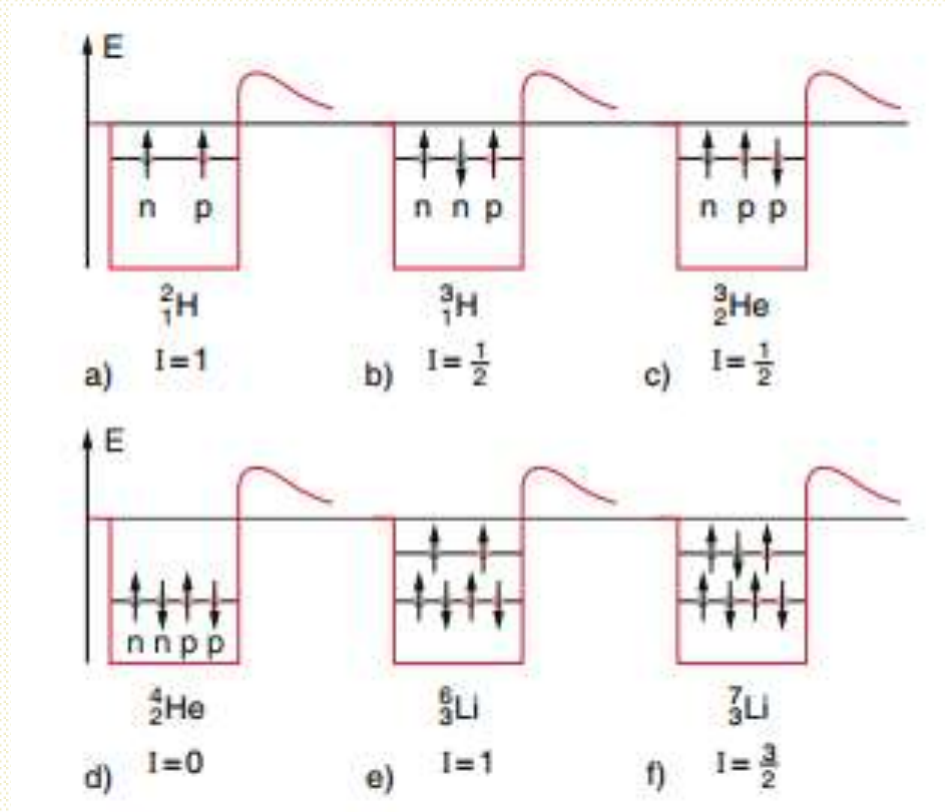
# Erklärung – kleine magische Zahlen

- Kleine magische Zahlen:  $Z=N$  (2,8,..)
- Annahme: Kastenpotential mit Breite  $a$

$$E_n = \hbar^2 * \frac{k_n^2}{2*m} \quad \text{mit } k_n = n * \pi/a$$

- Nukleonen haben Spin  $I = 1/2 \rightarrow$  Pauli-Prinzip
- Jeder Zustand mit je 2 Nukleonen mit antiparallelem Spin besetzbar
- Neutronen liegen tiefer im Potentialtopf als Protonen  
 $\rightarrow$  vernachlässigbar
- Bindungsenergie maximal wenn Gesamtspin = 0

# Erklärung – kleine magische Zahlen



Demtröder, Experimentalphysik 4, Auflage 4, Springer-Verlag, S. 29

# Erklärung – Schalenmodell

- Beginne mit 3D kugelsymmetrischen harmonischen Oszillator Potential und erweitere später
- Lösung der SGL:

$$E(n) = \hbar\omega(n_x + 1/2) + \hbar\omega(n_y + 1/2) + \hbar\omega(n_z + 1/2)$$

$$E(n) = \hbar\omega(n + 3/2) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

# Erklärung – Schalenmodell

**Tabelle 5.4** Zum Entartungsgrad  $q(n)$  beim dreidimensionalen harmonischen Oszillator

| $n$ | $n_x$ | $n_y$ | $n_z$ | $q$ |
|-----|-------|-------|-------|-----|
| 0   | 0     | 0     | 0     | 1   |
| 1   | 1     | 0     | 0     | 3   |
|     | 0     | 1     | 0     |     |
|     | 0     | 0     | 1     |     |
| 2   | 2     | 0     | 0     | 6   |
|     | 0     | 2     | 0     |     |
|     | 0     | 0     | 2     |     |
|     | 1     | 1     | 0     |     |
|     | 0     | 1     | 1     |     |
|     | 1     | 0     | 1     |     |
| 3   | 3     | 0     | 0     | 10  |
|     | 0     | 3     | 0     |     |
|     | 0     | 0     | 3     |     |
|     | 2     | 1     | 0     |     |
|     | 2     | 0     | 1     |     |
|     | 1     | 2     | 0     |     |
|     | 1     | 0     | 2     |     |
|     | 0     | 1     | 2     |     |
|     | 0     | 2     | 1     |     |
|     | 1     | 1     | 1     |     |

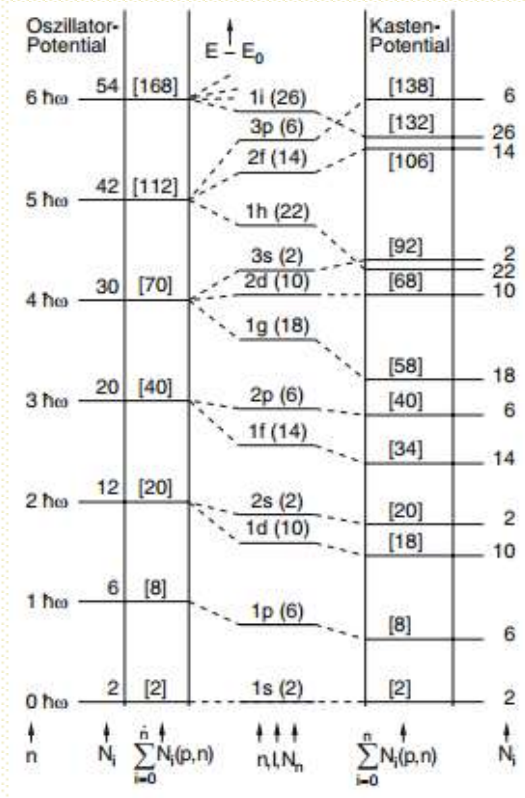
- Entartung  $q = (n + 1)(n/2 + 1)$   
→ Energieschale
- Jede Schale mit  $2q$  Protonen und Neutronen besetzbar
- Abweichung ab der dritten Schale

**Tabelle 5.5** Maximale Besetzungszahlen der Eigenzustände des dreidimensionalen harmonischen Oszillatorpotentials

| $n$                      | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5   |     |
|--------------------------|---|---|----|----|----|-----|-----|
| $q$                      | 1 | 3 | 6  | 10 | 15 | 21  |     |
| $N_p, N_n$               | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42  |     |
| $\sum_{i=0}^n N_i(p, n)$ | 2 | 8 | 20 | 40 | 70 | 112 |     |
| magische Zahlen          | 2 | 8 | 20 | 28 | 50 | 82  | 126 |

Demtröder, Experimentalphysik 4, Auflage 4, Springer-Verlag

# Erklärung – Schalenmodell



Demtröder, Experimentalphysik 4,  
Auflage 4, Springer-Verlag

- Reales Kernpotential zwischen dem Potential des harmonischen Oszillators und dem Kastenpotential
- Bei kleinen  $n$  Gruppierung deutlich
- Erwartung: Realität im Übergang  
→ experimentell nicht bestätigt

➔ Starke Spin-Bahn-WW im Kern

➔ 
$$V(r) = \frac{1}{2} * m * \omega^2 * r^2 + a * \mathbf{l} * \mathbf{s}$$

# Erklärung – Schalenmodell

$$\langle \mathbf{l} * \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{2} * [j(j + 1) - l(l + 1) - s(s + 1)] * \hbar^2$$

$$s = \pm 1/2 \qquad \qquad \qquad \rightarrow j = l \pm 1/2$$

$$\rightarrow \qquad \langle \mathbf{l} * \mathbf{s} \rangle = l/2 * \hbar \quad \text{und} \qquad -1/2 (l + 1) * \hbar$$

$$\rightarrow \qquad V(r) = \frac{1}{2} * m * \omega^2 * r^2 + a * l/2 * \hbar \qquad \text{und}$$

$$V(r) = \frac{1}{2} * m * \omega^2 * r^2 - a * 1/2 (l + 1) * \hbar$$

$$\rightarrow \qquad \Delta E = (2l + 1) * \frac{1}{2} * a * \hbar$$

Wichtig:

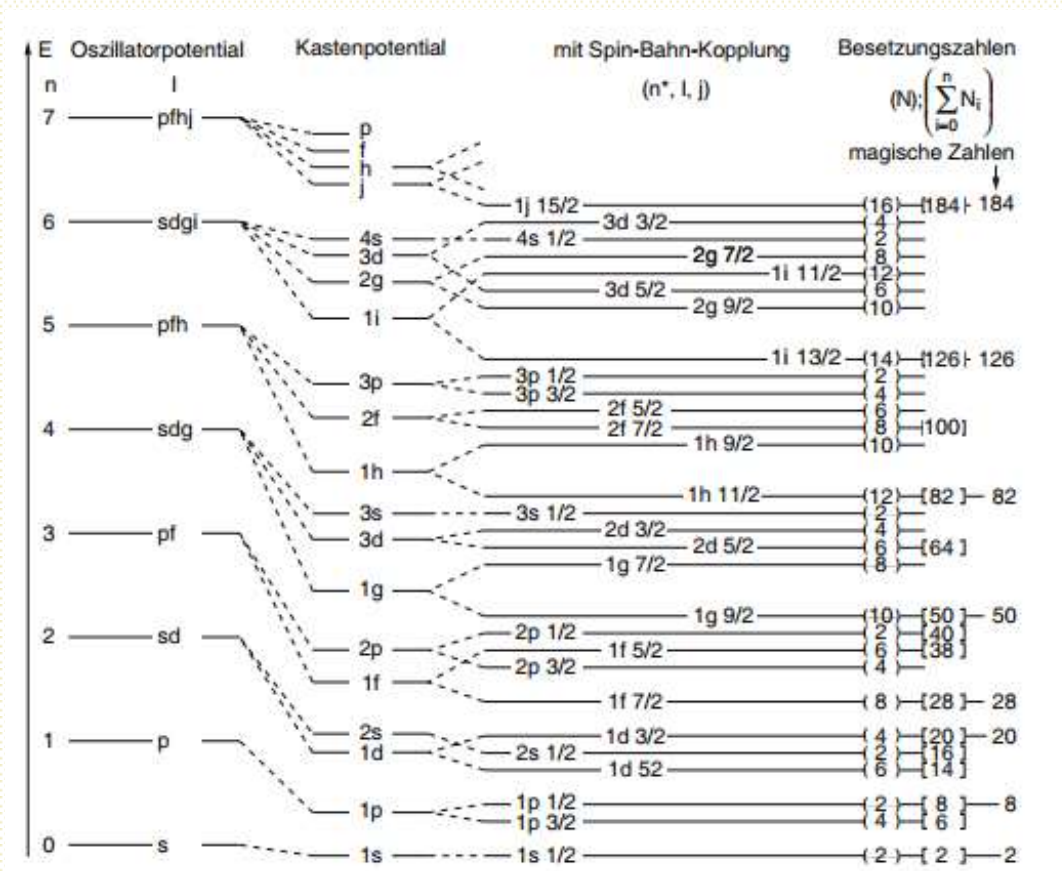
$j = l - 1/2$  energetisch günstiger als  $j = l + 1/2$

# Erklärung – Schalenmodell

| 1                                                      | 2                 | 3                                    | 4                               | 5                                        | 6             | 7                   | 8                     |
|--------------------------------------------------------|-------------------|--------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------------|---------------|---------------------|-----------------------|
| Oscil-<br>lator-<br>quan-<br>tum<br>num-<br>ber<br>$r$ | Multi-<br>plicity | Sum<br>of all<br>multi-<br>plicities | Orbital<br>momen-<br>tum<br>$l$ | Total<br>angular<br>momen-<br>tum<br>$j$ | $l_j$ -symbol | Multi-<br>plicities | Magic<br>num-<br>bers |
| 1                                                      | 2                 | 2                                    | 0                               | 1/2                                      | $s_{1/2}$     | 2                   |                       |
| 2                                                      | 6                 | 8                                    | 1                               | 3/2                                      | $p_{3/2}$     | 4                   |                       |
| 3                                                      | 12                | 20                                   | 2                               | 1/2                                      | $p_{1/2}$     | 2                   | 14                    |
| 4                                                      | 20                | 40                                   | 3                               | 5/2                                      | $d_{5/2}$     | 6                   |                       |
| 5                                                      | 30                | 70                                   | 4                               | 3/2                                      | $d_{3/2}$     | 4                   |                       |
| 6                                                      | 42                | 112                                  | 5                               | 1/2                                      | $s_{1/2}$     | 2                   | 28                    |
| 7                                                      |                   |                                      | 6                               | 7/2                                      | $f_{7/2}$     | 8                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 7                               | 5/2                                      | $f_{5/2}$     | 6                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 8                               | 3/2                                      | $p_{3/2}$     | 4                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 9                               | 1/2                                      | $p_{1/2}$     | 2                   | 50                    |
|                                                        |                   |                                      | 10                              | 9/2                                      | $g_{9/2}$     | 10                  |                       |
|                                                        |                   |                                      | 11                              | 7/2                                      | $g_{7/2}$     | 8                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 12                              | 5/2                                      | $d_{5/2}$     | 6                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 13                              | 3/2                                      | $d_{3/2}$     | 4                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 14                              | 1/2                                      | $s_{1/2}$     | 2                   | 82                    |
|                                                        |                   |                                      | 15                              | 11/2                                     | $h_{11/2}$    | 12                  |                       |
|                                                        |                   |                                      | 16                              | 9/2                                      | $h_{9/2}$     | 10                  |                       |
|                                                        |                   |                                      | 17                              | 7/2                                      | $f_{7/2}$     | 8                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 18                              | 5/2                                      | $f_{5/2}$     | 6                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 19                              | 3/2                                      | $p_{3/2}$     | 4                   |                       |
|                                                        |                   |                                      | 20                              | 1/2                                      | $p_{1/2}$     | 2                   | 126                   |
|                                                        |                   |                                      | 21                              | 13/2                                     | $i_{13/2}$    | 14                  |                       |
|                                                        |                   |                                      | 22                              | 11/2                                     | $i_{11/2}$    | 12                  |                       |
|                                                        |                   |                                      | 23                              | 9/2                                      | $g_{9/2}$     | 10                  |                       |

„On the magic numbers in nuclear shell structure“ Phys. Rev. Vol.75 No.11 1766

# Erklärung – Schalenmodell



Demtröder, Experimentalphysik 4, Auflage 4, Springerverlag

# Kurze Zusammenfassung

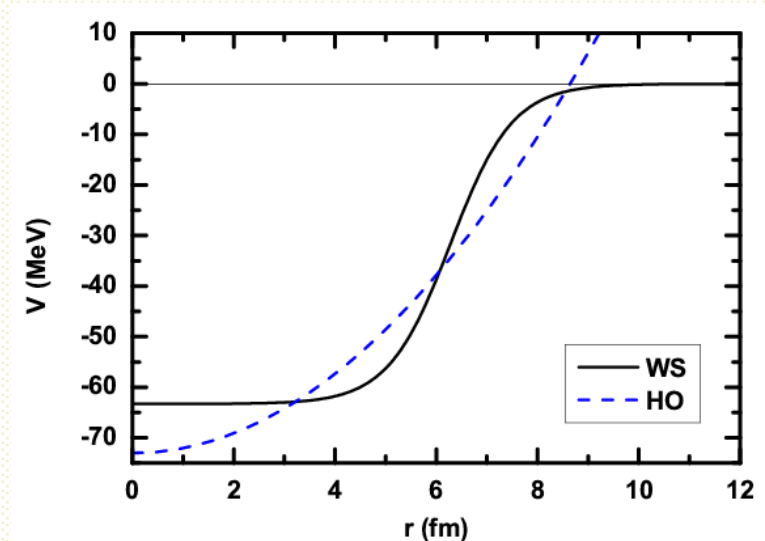
- Experimente zeigten besonders hohe Bindungsenergien bei bestimmten Nukleonenzahlen
- Lange Zeit unerklärbar
- Goeppert-Mayer, Jensen stellten 1955 Schalenmodell auf
- Lösung: Potential des Harmonischen Oszillators + Term für Spin-Bahn-Wechselwirkung

# Ausblick

- Wood Saxon Potential

$$V(r) = -\frac{V_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}$$

(R: Kernradius)



<http://inspirehep.net/record/1123941/files/Fig5.png>

- Interacting Boson Approximation
- Künstlich erzeugte Kerne bei vorhergesagten magischen Zahlen → Inseln der Stabilität

# Quellen

- „Elementary theory of nuclear shell structur“ Maria Goeppert-Mayer, Hans Jensen, 1955,
- „Experimentalphysik 4, Kern-, Teilchen- und Astrophysik“, Wolfgang Demtröder, Springer Verlag
- „Fundamentals in Nuclear Physics“ J. Basdevant, J. Rich, M. Spiro, 2005, Springer Verlag
- „On the „Magic Numbers“ in nuclear structure“ O. Haxel, H. Jensen, H. Suess, Phys.

Rev. 75, 1766 (1949) - Published 1 June 1949

- „Mass Spectrometer for Isotope and Gas Analysis“ Alfred O. Nier, 1947, Rev. Sci. Instr. 18, 6
- „Nicht nur Marie Curie...“ C. Kerner, 1990, Beltz Verlag, 4. Auflage 1995
- [https://de.wikipedia.org/wiki/Magische\\_Zahl\\_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Magische_Zahl_(Physik))
- [https://de.wikipedia.org/wiki/Maria\\_Goeppert-Mayer](https://de.wikipedia.org/wiki/Maria_Goeppert-Mayer)
- [https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes\\_Hans\\_Daniel\\_Jensen](https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Hans_Daniel_Jensen)
- <http://applet-magic.com/magicnumbers0.htm>
- [http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/3/anc/masse/masse\\_basic.vlu.html](http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/3/anc/masse/masse_basic.vlu.html)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear\\_shell\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_shell_model)
- [https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm\\_data/lm\\_324/daten/kap\\_24/node22.htm](https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_324/daten/kap_24/node22.htm)
- <http://www.chemie.de/lexikon/Bethe-Weizs%C3%A4cker-Formel.html>