

Aufgabenblatt 1 – Experimentalphysik IV – SS18

Diskussion in den Übungen: Do./Fr., 26./27. April

1.1 Wasserstoffatom (1 Punkt)

- Berechnen Sie die Wellenlängen aller Linien im sichtbaren Bereich ($\lambda = 400 \text{ nm} - 800 \text{ nm}$) des Wasserstoff-Spektrums.
- Die Energien für die verschiedenen magnetischen Quantenzahlen m_l eines bestimmten Energieniveaus $E(n, l)$ im Wasserstoff sind normalerweise entartet. Durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes $\vec{B}$, z.B. in z-Richtung, kann man diese Entartung aufheben. Die Energieaufspaltung ist dabei gegeben durch $\Delta E = m_l \mu_B B_z$, mit B_z der Magnetfeldstärke in z-Richtung. Wie groß ist die maximale Energieaufspaltung innerhalb des 3d-Niveaus, wenn ein Magnetfeld der Stärke 1 Tesla angelegt wird?

1.2 Exotische Atome (1 Punkt)

Betrachten Sie die beiden folgenden exotischen Atome:

- Das Positronium: ein Atom bestehend aus einem Elektron und seinem Antiteilchen, dem Positron. Das Positron soll die gleiche Masse haben wie das Elektron $m_{\text{pos}} = m_e$, aber positive Ladung.
- Ein Atom bestehend aus einem schweren Atomkern, z.B. Blei ($Z = 82$), und einem Myon. Das Myon ist ein "schweres Elektron" mit der gleichen Ladung, aber einer Masse von $m_\mu = 207 m_e$.

- Berechnen Sie die Bindungsenergien der beiden oben beschriebenen exotischen Atome.
- Berechnen Sie die Bohr-Radien im Grundzustand der beiden oben beschriebenen Atome.

1.3 Heliumatom (1 Punkt)

Betrachten Sie ein Heliumatom mit der Elektronenkonfiguration $1s3d$. Zeichnen Sie eine Folge von Termschemata, die zu erwarten sind, wenn man nacheinander folgende Wechselwirkungen berücksichtigt:

- nur die Coulomb-Anziehung zwischen jedem Elektron und dem Kern,
- die Elektron-Elektron-Wechselwirkung,
- die Spin-Bahn-Kopplung,
- den Effekt eines schwachen äußeren Magnetfeldes.

Hinweis: Dieses Thema wird in der Vorlesung am Montag, den 23. April behandelt.

1.4 Antisymmetrische Wellenfunktion (1 Punkt)

Die 1S_0 Wellenfunktion der $1s2s$ -Konfiguration für das Heliumatom ist das Produkt aus der Ortswellenfunktion ϕ_S und der Spinwellenfunktion χ_{S, m_S}

$$\psi(^1S_0) = \phi_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \chi_{0,0}(1, 2). \quad (1)$$

Das 3S_1 Niveau ist dreifach entartet mit den Wellenfunktionen

$$\psi({}^3S_1) = \phi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \begin{cases} \chi_{1,1}(1, 2) \\ \chi_{1,0}(1, 2) \\ \chi_{1,-1}(1, 2) \end{cases} \quad (2)$$

für die drei Projektionsquantenzahlen $m_S = 1, 0, -1$.

Die Spinwellenfunktionen für diese Gleichungen lauten

$$\chi_{0,0}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle] \quad (3)$$

$$\chi_{1,1}(1, 2) = |\uparrow\uparrow\rangle \quad (4)$$

$$\chi_{1,0}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle] \quad (5)$$

$$\chi_{1,-1}(1, 2) = |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (6)$$

- Konstruieren Sie die symmetrischen und antisymmetrischen Ortswellenfunktionen ϕ_S und ϕ_A aus den Einteilchenwellenfunktionen $\psi_{nlm} = \psi_{100}(\vec{r})$ und $\psi_{200}(\vec{r})$.
Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen in den Gleichungen (1) und (2) antisymmetrisch bezüglich Teilchenaustausch sind.
- Argumentieren Sie anschaulich (unter Betrachtung der Ortswellenfunktionen), welcher Spinzustand (Singulett oder Triplett) energetisch höher liegt.
- Argumentieren Sie, warum der 3P_0 Zustand der Grundzustand von ${}^{12}\text{C}$ ist und nicht der Zustand mit maximalem Drehimpuls 3D_1 .
- Eine Dreiteilchenwellenfunktion für Fermionen kann mit Hilfe der sogenannten Slater-Determinante geschrieben werden. Betrachten Sie dafür die antisymmetrische Ortswellenfunktion

$$\phi_{abc}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (7)$$

für drei Teilchen mit der jeweiligen Einteilchenwellenfunktion $\phi(\vec{r}_i)$ für $i = a, b, c$

$$\phi_{abc}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \det \begin{pmatrix} \phi_a(\vec{r}_1) & \phi_b(\vec{r}_1) & \phi_c(\vec{r}_1) \\ \phi_a(\vec{r}_2) & \phi_b(\vec{r}_2) & \phi_c(\vec{r}_2) \\ \phi_a(\vec{r}_3) & \phi_b(\vec{r}_3) & \phi_c(\vec{r}_3) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion antisymmetrisch bezüglich des Austauschs von zwei Teilchen ist (es reicht exemplarisch für eine Kombination). Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion für $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, $\vec{r}_1 = \vec{r}_3$ und für $\vec{r}_2 = \vec{r}_3$ und ebenso für $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_3$ verschwindet.