

11.0 Fragen zur Diskussion

Hinweis: Die folgenden Fragen sollten zu Beginn der Übungsgruppe unter den Studierenden diskutiert und dann der gesamten Gruppe vorgetragen werden. Eine schriftliche Einreichung ist nicht notwendig.

- Warum benötigt man zur Aufrechterhaltung einer nuklearen Kettenreaktion in einem Reaktor das seltene Isotop ^{235}U an Stelle des in der Natur sehr viel häufiger vorkommenden Isotops ^{238}U ?
- Zur Abbremsung von Neutronen aus der Kernspaltung verwendet man eher schweren Wasserstoff (D) als den kinematisch günstigeren Wasserstoff (H). Warum ist das so?
- Bei der Elementensynthese im frühen Universum wurden fast ausschliesslich Atomkerne mit Massenzahl bis zu $A = 4$ erzeugt und kaum welche mit größerer Masse. Warum ist das so?
- Welche bei der Kernfusion in unserer Sonne beteiligte Reaktion läuft am langsamsten ab und bestimmt somit die Brenndauer unserer Sonne?
- Durch Fusionsreaktionen in Sternen werden Atomkerne bis zur Massenzahl $A \approx 60$ gebildet. Warum werden durch Fusion keine Atomkerne mit größerer Massenzahl gebildet? Geben Sie einen Prozess an, der zu Atomkernen mit größerer Massenzahl führt.

Frage a):

Technologische Gesichtspunkte:

- Minimierung Neutronenverlust: "Core" oder "Kern" des Reaktors muß groß genug sein. Es gibt eine "kritische Masse" (Oberfläche : Volumen $\propto 1/r$)
Vollkugel von 15 kg ^{235}U mit Radius $r > 6\text{ cm}$ ist "kritisch"
allerdings: der größte Teil des natürlichen Urans ist ^{238}U (99.3%). ^{238}U fängt Neutronen mit großem Wirkungsquerschnitt ein und spaltet dadurch nicht
7a ^{235}U ist der entstehende gg-Kern nach Neutronen einfang stärker gebunden und daher höher angeregt. Bei ^{238}U umgekehrt.

Frage b):

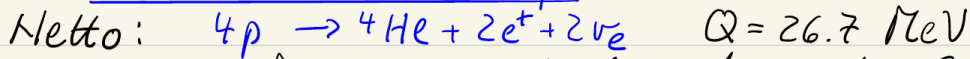
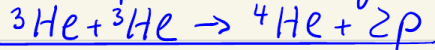
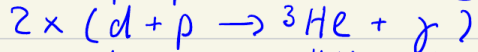
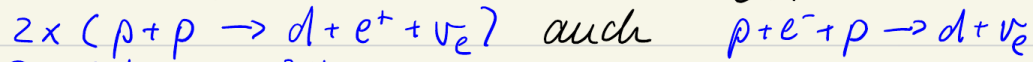
- Abbremsung (Modemierung) der Neutronen bei gleichzeitiger Minimierung von Einfang, ausser durch ^{235}U . Modemierung durch elastische und inelastische Stöße mit Atomkernen. Optimal: Wasserstoff (H oder D) in Wasser. H hat großen Neutroneneinfangsquerschnitt, D besser. auch Beryll: Kohlenstoff (Graphit)
Abbremslänge in H_2O : 5.6 cm in C: 18.7 cm

Frage c):

- sobald $T \lesssim 1\text{ MeV}$ bilden sich überlebende Atomkerne
 $p + n \rightarrow d + \gamma$ 2.2 MeV Bindungsenergie
 $d + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$
 ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p$
da es keine stabilen $A=5$ Kerne gibt: kein Ende
nur noch ganz wenig ${}^7\text{Li}$
 ${}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ und ${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2 {}^4\text{He}$
zu Beginn der Nukleosynthese $p:n \approx 5:1$
sobald Neutronen aufgebraucht $\sim$ stoppt Nukleosynthese (ca 3 Min nach Urknall)

Frage d:)

1938 erklärt H. Bethe Fusionsreaktionen in der Sonne

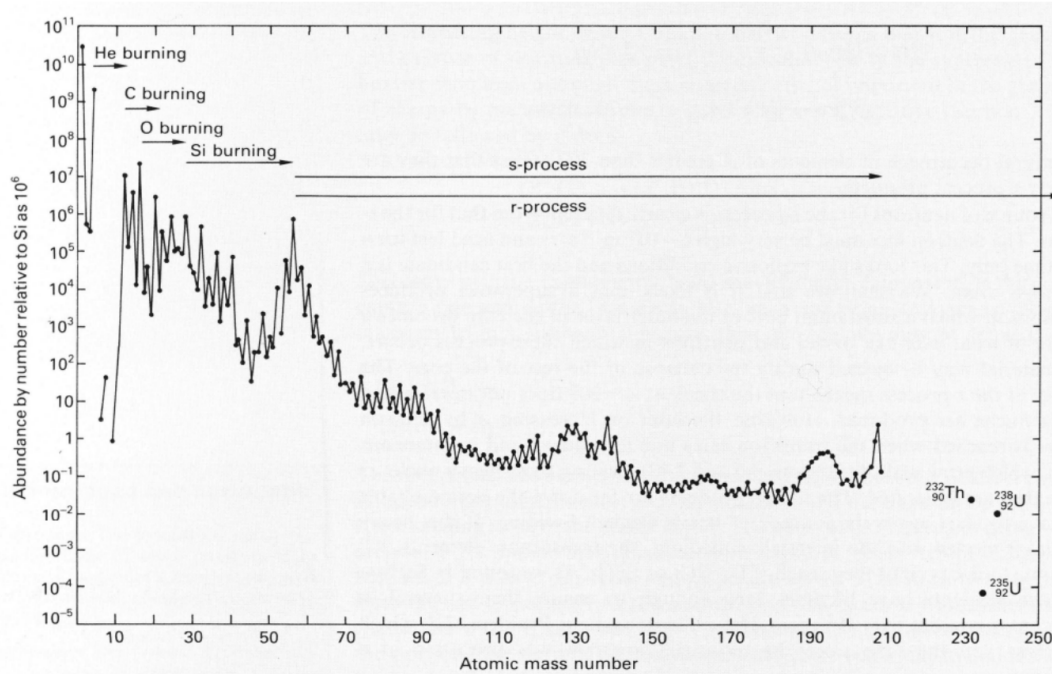


pro Masse energetisch noch mehr Energie freigesetzt als durch Spaltung: 1 vs 7 MeV/Nukleon

Frage e):

- schweren Elemente als Fe werden durch Neutroneneinfangsreaktionen und β -Zerfälle erzeugt

Elementverteilung



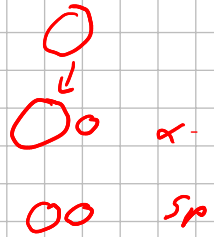
Häufigkeit von Elementen relativ zu Silizium (Summe von $A=28,29,30$ auf 10^6 normiert)

11.1 Bei der Kernspaltung freigesetzte Energie (1 Punkt)

Ab einer gewissen Massenzahl A_0 können schwere Kerne spontan in zwei leichtere Kerne B_1, B_2 spalten.

- Ab welcher Massenzahl A_0 ist die Spaltung im Tröpfchenmodell energetisch möglich unter der Annahme, dass sie symmetrisch verläuft, d.h. $B_1 = B_2 = A/2$? Verwenden Sie dabei die Näherung $Z \approx N$ für alle beteiligten Kerne und vernachlässigen Sie den Asymmetrieterm.
- Ein Kern, der spontan spaltet, ist offensichtlich radioaktiv. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der im Periodensystem in Abb. 1.10a gezeigten Liste der radioaktiven Kerne und diskutieren Sie Ihre Beobachtung.
- Warum ist selbst in sehr schweren Kernen fast überall der α -Zerfall gegenüber spontaner Spaltung dominant? Berechnen Sie dazu die Coulombbarriere am Beispiel von $^{254}_{98}\text{Cf}$, ein Mal dafür, dass ein α -Teilchen und ein Restkern und ein weiteres Mal, dass zwei Spaltfragmente mit gleicher Ladung und Masse sich gerade berühren.

Paarungsterm

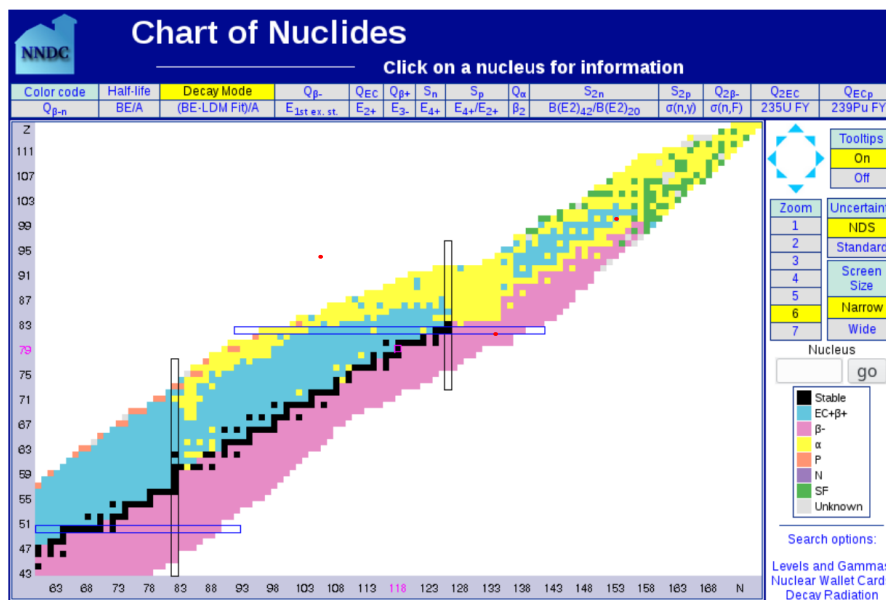


$$B(\text{MeV}) = b_v A - b_s A^{2/3} - b_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - b_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} + b_p A^{-1/2}$$

"Weizsäcker Formel"

$$b_s = 18.34 \text{ MeV}, \quad b_c = 0.717 \text{ MeV}$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad E_f &= -[B(A, Z) - 2B(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2})] \\
 &= b_s A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + b_c \left(\frac{A}{2}\right)^2 A^{-1/3} (1 - 2^{-2/3}) \\
 \Rightarrow A &\geq 72.6
 \end{aligned}$$



$$c) \quad V(r) = \frac{z \cdot z}{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{137}}} \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 197 \text{ MeV fm}}} \hbar c$$

$$\alpha \hbar c = 1,44 \text{ MeV fm}$$

$$\overset{r_{\text{tot}}}{\bigcirc \bigcirc} \quad r_1 + r_2 = r_0 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right)$$

$$\Rightarrow V_{\alpha}(r) = \frac{2 \cdot 96 \alpha \hbar c}{1,2 \text{ fm} (4^{1/3} + 250^{1/3})} = 29,2 \text{ MeV}$$

$$V_{sp}(r) = \frac{49,49 \alpha \hbar c}{1,2 \text{ fm} \cdot 2 \cdot 127^{1/3}} = 286,2 \text{ MeV}$$

11.2 Schalenmodell: Spin-Bahn-Kopplung (1 Punkt)

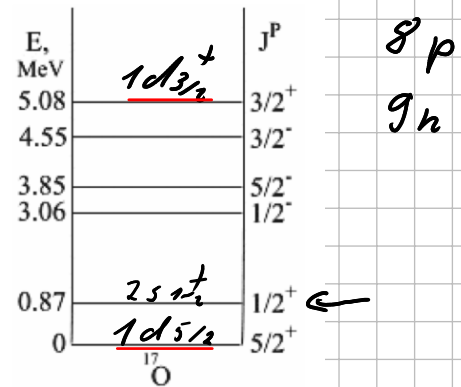
Die Spin-Bahn-Kopplung wird durch einen zusätzlichen Term $V_{ls} = \text{const.} \cdot (\vec{l} \cdot \vec{s})$ im Kernpotential $V = V(r)$ berücksichtigt. Dieser Term führt zur Aufspaltung der sonst entarteten Zustände mit $j = l \pm 1/2$.

- a) Zeigen Sie, dass der Energiebeitrag zur Kernbindungsenergie wegen der Spin-Bahn-Kopplung (ΔE_{jls}) gleich

$$\Delta E_{jls} = \frac{a}{2} [j(j+1) - \underline{l(l+1)} - \underline{s(s+1)}]$$

ist, wobei a die Spin-Bahn-Kopplungskonstante darstellt.

- b) Schreiben Sie für ^{17}O die Nukleonenzonfiguration für Neutronen und Protonen im Schalenmodell auf. Welchen Wert für Spin und Parität (J^π) erwarten Sie für den Grundzustand von ^{17}O im Schalenmodell?
- c) Welche angeregten Zustände in der Abbildung rechts können mit dem Schalenmodell beschrieben werden?
- d) Welcher der rechts gezeigten angeregten Zustände ist Partner zum Grundzustand mit gleichem Bahndrehimpuls l ? Bestimmen Sie aus dem Energieunterschied dieser beiden Zustände die Spin-Bahn-Kopplungskonstante a .



$$\Delta E_{l,j,s} = \langle j, l, s, m_j | (\vec{l} \cdot \vec{s}) | j, l, s, m_j \rangle$$

$$\vec{j}^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2$$

$$\vec{j}^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 + 2 \vec{l} \cdot \vec{s}$$

EW zu Drehimpuls: $j(j+1) = l(l+1) + s(s+1) + 2 \vec{l} \cdot \vec{s}$
 $\vec{l}^2, \vec{s}^2$ ebenso

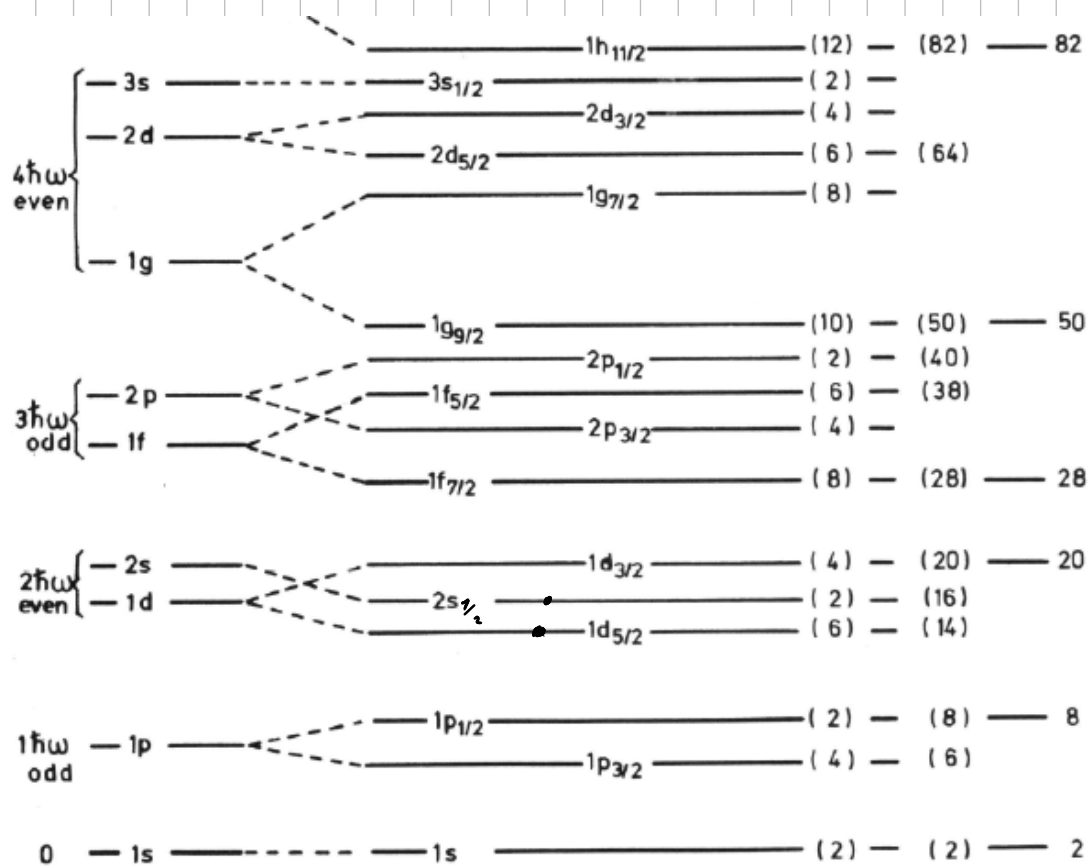
$$j(j+1) = l(l+1) + s(s+1) + 2 \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$\Rightarrow \vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}$$

d) $\Delta E(^{17}\text{O}_{5/2^+}) - \Delta E(^{17}\text{O}_{3/2^+})$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \right) = -5.08 \text{ MeV} \Rightarrow a \approx 2 \text{ MeV}$$

Abb



$2s_{1/2}^+$
 $1d_{3/2}^+$

$\pi: (-1)^l$ "f"
 9. n : $l=2$
 $l=\frac{5}{2}$
 8n, 8p
 Geschl.:
 $l=0$
 $\pi: +$

11.3 Angeregte Zustände; Kernrotationen (1 Punkt)

Die Abbildung rechts zeigt die Energieniveaus (in keV) einer Rotationsbande in ^{180}Hf . (Quelle: National Nuclear Data Center <https://www.nndc.bnl.gov>)

- a) Berechnen Sie aus den einzelnen angegebenen Energien der γ -Übergänge die Werte $1/A = 2\Theta/\hbar^2$ dieser Rotationsbande als Funktion des Drehimpulses des zerfallenden Zustands und tragen Sie die Werte gegen den Gesamtdrehimpuls J des Kernzustands auf (es ist nicht der Spin!).
Hinweis: Mit Θ ist das Trägheitsmoment des Kerns bezeichnet.
- b) Berechnen Sie den entsprechenden Wert $1/A$ für eine feste Kugel von gleichem Radius (R) und Masse (M). Vergleichen Sie das Ergebnis mit a) und begründen Sie den Unterschied.

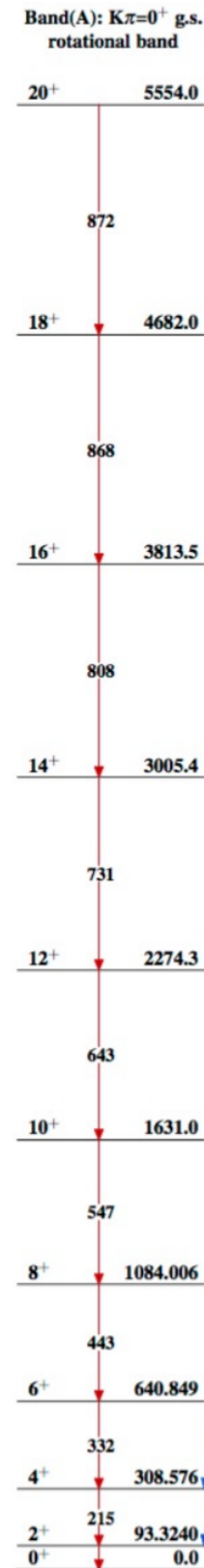
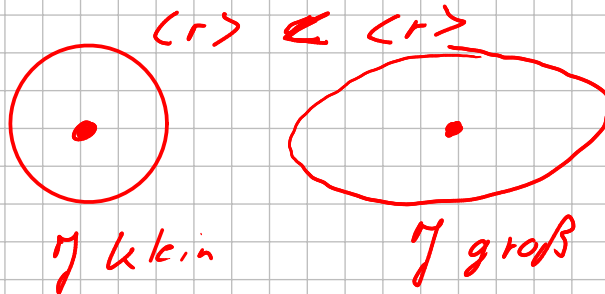
$$E = \hbar^2 \frac{J(J+1)}{2\Theta}$$

$$\Delta E = E_{J+2} - E_J = \frac{\hbar^2(4J+2)}{2\Theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{2\Theta}{\hbar^2} = \frac{4J+2}{\Delta E}$$

J	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
E [MeV]	0.093	0.309	0.641	1.084	1.631	2.274	3.005	3.814	4.682	5.554
ΔE [MeV]	0.093	0.216	0.332	0.443	0.547	0.643	0.731	0.809	0.868	0.872
$1/A$ [MeV $^{-1}$]	64.5	64.8	66.3	67.7	69.5	71.5	73.9	76.6	80.6	89.4

$$\Theta = \int dm \cdot r^2$$



$$\Theta = \frac{2}{5} M R^2$$

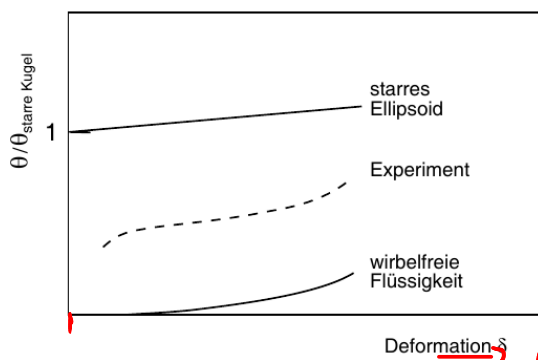
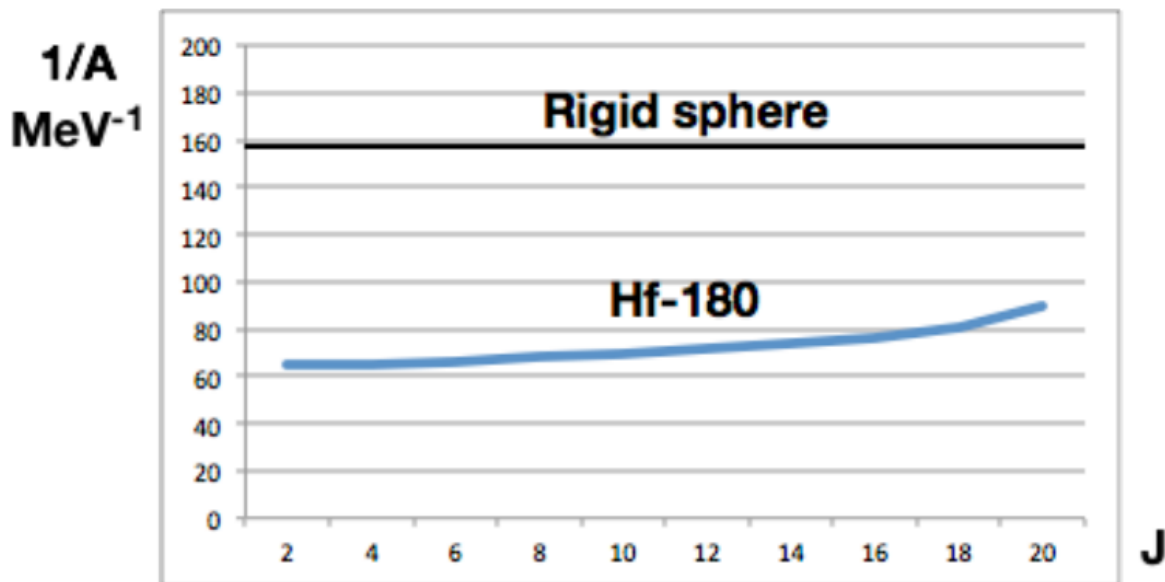
$$\Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{2 \Theta}{\hbar^2} = \frac{4}{5 \hbar^2} M R^2 \quad (*)$$

$$^{180}\text{Hf} \quad M \approx 180 \cdot 931,5 \text{ MeV} = 168.000 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$= 1,2 \text{ fm } 180^{1/3} = 6,77 \text{ fm}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = 158 \text{ MeV}^{-1} \quad (*)$$



- niedrigste Anregung deformierter Kerne: Rotation um Achse $\perp$ zu Symmetriachse
 Energiezustände: Eigenwerte des Drehimpulsoperators $E_I = \frac{\hbar^2}{2\Theta} I(I+1)$ mit Drehimpulsquantenzahl $I=0,2,4,\dots$

und Trägheitsmoment Θ (betrachte gg-Kerne $\rightarrow$ kein Spin). Wegen Spiegelsym. um Achse $\perp$ zu Symmetriachse nur gerade I erlaubt.

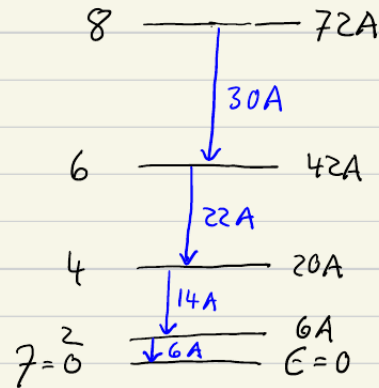
definieren $A = \hbar^2/2\Theta$

$$\rightarrow \Delta E = E_I - E_{I-2} = 4AI - 2A$$

$$\Delta(\Delta E) = 8A$$

Spektrum mit äquidistanten Linien im Energieabstand $8A$

$\rightarrow$ berechne daraus Trägheitsmoment



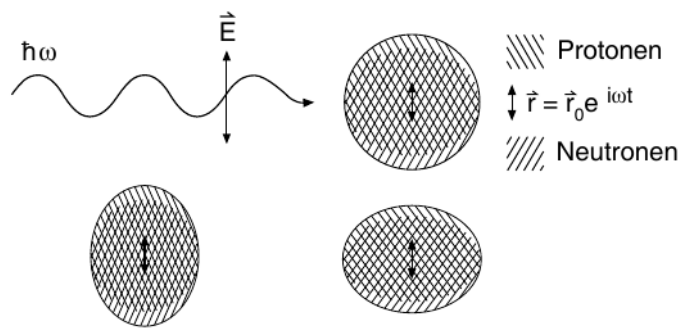


Abbildung 18.4. Interpretation der Dipolresonanz als Schwingung der Protonen und Neutronen gegeneinander. In deformierten Kernen (*unten*) gibt es zwei verschiedene Schwingungsmoden.

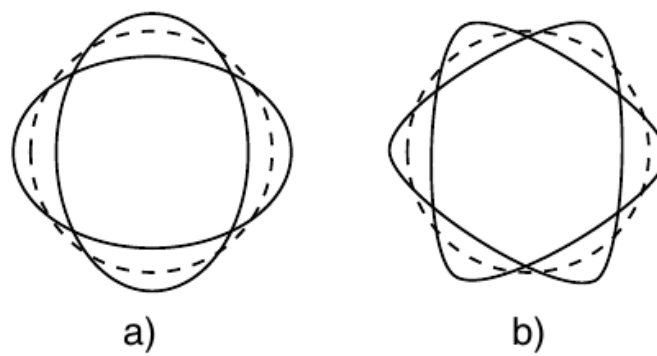


Abbildung 18.8. (a) Quadrupolvibration; (b) Oktupolvibration