

Aufgabenblatt 10 – Experimentalphysik IV – SS18

Diskussion in den Übungen: Do./Fr., 28./29. Juni

10.1 Elastische Elektronenstreuung (1 Punkt)

Ein Elektron der Energie E wird elastisch an einem spinlosen Kern der Masse M gestreut, der im Laborsystem ruht. Berücksichtigen Sie den Rückstoß des Kerns.

- Berechnen Sie die Energie eines Elektrons (E'), das um einen Winkel Θ im Laborsystem abgelenkt wurde. Nehmen Sie an, dass die Elektronenmasse vernachlässigt werden kann.
- Das Elektron hat die Energie $E = 800$ MeV und das Targetteilchen ist ein ^{40}Ca -Kern. Wie groß ist der maximale Anteil der Elektronenenergie, der auf den Kern übertragen werden kann? Wie ändert sich dieser Wert, wenn an einem Proton als Target gestreut wird? Was erhält man im Fall der Streuung von Elektronen mit einer Energie von $E = 4.8$ GeV an einem Protonentarget?
- Wie groß ist die Energie E' eines an einem Proton gestreuten Elektrons, das unter einem Laborwinkel $\Theta = 10^\circ$ bei einer Einschussenergie $E = 4.8$ GeV nachgewiesen wird?
Hinweis: Nehmen Sie auch hier einen Rückstoß ($E \neq E'$) an.

Musterlösung:

- Viererimpuls des Elektrons vor/nach der Streuung: p, p'
Energie des Elektrons vor/nach der Streuung: E, E'
Viererimpuls des schweren Teilchens vor/nach der Streuung: P, P'
Viererimpulserhaltung: $p + P = p' + P'$
Quadrieren: $p^2 + P^2 + 2pP = p'^2 + 2p'P' + P'^2$
mit $p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2$ und $P^2 = P'^2 = M^2 c^2$
 $pP = p'P' = p'(p + P - p') = p'p + p'P - p'^2 = p'p + p'P - m_e^2 c^2$
Viererimpulse im Laborsystem:
Elektron $p = (E/c, \vec{p})$, $p' = (E'/c, \vec{p}')$ und Proton $P = (Mc, \vec{0})$, $P' = (E'_p/c, \vec{P}')$
einsetzen ergibt: $EMc^2 = E'E - \vec{p} \cdot \vec{p}' c^2 + E'Mc^2 - m_e^2 c^4$
für m_e klein gegen die Energien $E \approx pc$ und dadurch
 $EMc^2 = E'E(1 - \cos \Theta) + E'Mc^2$
 $E' = \frac{E}{1 + E/Mc^2(1 - \cos \Theta)} = \frac{E}{1 + 2E/Mc^2 \sin^2(\Theta/2)}$
- Maximaler Impulsübertrag bei $\Theta = \pi$. ^{40}Ca hat eine Masse von 37.3 GeV. Der maximale Energieübertrag mit $E'_{\max} = 767$ MeV. $E - E'_{\max} = 33$ MeV, d.h. 4.1%. Die Protonmasse ist 0.938 GeV und damit ist der maximale Energieübertrag mit $E'_{\max} = 296$ MeV, $E - E'_{\max} = 504$ MeV, d.h. 63%. Bei $E = 4.8$ GeV ist $E'_{\max} = 427$ MeV $\rightarrow E - E'_{\max} = 4.37$ GeV, d.h. 91%.
- $E'_{10^\circ} = 4.45$ GeV

10.2 Feynman-Diagramm und Wirkungsquerschnitt (1 Punkt)

Im Folgenden kann der Rückstoß des schweren Streupartners vernachlässigt werden. Betrachten Sie die elastische Streuung eines geladenen Teilchens an einem schweren ruhenden Kern. Es gilt folgender Zusammenhang für den Streuwinkel θ und die Impulse des Teilchens vor und nach dem Stoß, $\vec{p}$ und $\vec{p}'$:

$$(\vec{p} - \vec{p}')^2 = 4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2).$$

Dabei ist E die Energie des einlaufenden Teilchens.

- a) Leiten Sie die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für Rutherford-Streuung vom Streuwinkel und den Ladungen der beiden Stoßpartner her. Betrachten Sie dazu den Photonenpropagator-Term im Feynman-Diagramm, welcher die dominante Wechselwirkung beschreibt und die beteiligten Vertices.
- b) Betrachten Sie die elastische Streuung eines Elektrons und eines Pions gleicher Energie an einem schweren ruhenden Kern mit Kernspin Null. Geben Sie das Verhältnis der differentiellen Wirkungsquerschnitte

$$\left(\frac{d\sigma_e}{d\Omega} / \frac{d\sigma_\pi}{d\Omega} \right)$$

als Funktion des Impulses $\vec{p}$ und der Energie E des Elektrons an.

Hinweis: Der Stoßparameter sei so groß, dass Beiträge der starken Wechselwirkung oder deren Restwechselwirkungen zu der Streuung vernachlässigt werden können.

Musterlösung:

a) $\mathcal{A} \propto Z_1 \sqrt{\alpha} \frac{1}{q^2} Z_2 \sqrt{\alpha}$
 $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{A}|^2 \propto \frac{1}{q^4} \cdot (Z_1 Z_2 \alpha)^2$

Für elastische Streuung unter vernachlässigung des Rückstoss gilt $E = E' \rightarrow \vec{q}^2 = -q^2$.

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \cdot (Z_1 Z_2 \alpha)^2, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

Gefragt sind ja hier nur die Abhängigkeit vom Streuwinkel und den Ladungen.

Exakte Lösung $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16E_{\text{kin}}^2 \sin^4 \theta/2} \cdot (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \cdot (\hbar c)^2$

b) Elektron hat Spin=1/2, Pion hat Spin=0 $\rightarrow \frac{d\sigma_e}{d\Omega} / \frac{d\sigma_\pi}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega} / \frac{d\sigma_{\text{Rutherford}}}{d\Omega} = (1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta/2)$,
 $\beta_e = \frac{v_e}{c} = |\vec{p}_e|/E_e$.

10.3 Formfaktor I (1 Punkt)

- a) Zeigen Sie, dass der Formfaktor für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r = |\vec{r}|)$ gegeben ist durch

$$F(\vec{q}) = F(q) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr$$

und dass dieser Formfaktor tatsächlich wie in der Vorlesung angenommen eine Funktion von q^2 ist, d.h. nur gerade Potenzen von $q^{2n} = (q^2)^n$ enthält.

Hinweis: Die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = e \cdot f(\vec{r})$, mit e der Elementarladung und der Normierung: $\int f(\vec{r}) d^3r = 1$.

- b) Zeigen Sie weiterhin, dass für die Steigung des Formfaktors bei $q^2 = 0$ gilt:

$$\left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} = -\frac{e}{6\hbar^2} \langle r^2 \rangle,$$

wobei $\langle r^2 \rangle$ der mittlere quadratische (root-mean-square, rms) Ladungsradius ist.

Musterlösung:

6.1 a) Für eine auf 1 normierte Ladungsverteilung $g(\vec{r})$ ist der Formfaktor wie folgt definiert:

$$F(\vec{q}) = \int g(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r \quad (\text{s. z.B. Haken\& Martin})$$

Für Integration Verwendung von Kugelkoordinaten
 z-Achse in Richtung von $\vec{q} \rightarrow \vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \vartheta$
 (s. z.B. Nolting Band 1)

$$F(\vec{q}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} g(r) e^{iqr \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi$$

Substitution $x = \cos \vartheta$

$$= -2\pi \int_1^{-1} \int_0^{\infty} g(r) e^{iqr x} r^2 dr dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} g(r) \left[\frac{1}{iqr} e^{iqr x} \right]_{-1}^1 r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} g(r) \frac{1}{iqr} (e^{iqr} - e^{-iqr}) r^2 dr$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} g(r) \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr \quad (1)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

Das Integral (1) ist eine gerade Funktion von q , so dass z.B. eine Taylorentwicklung nur gerade Potenzen von $q^{2n} = (q^2)^n$ enthält. Daher ist der Formfaktor ausschließlich eine Funktion von q^2 .

b) Taylorentwicklung des sinus Terms in (1) führt auf

$$F(q^2) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \left[1 - \frac{q^2 r^2}{\hbar^2 \cdot 3!} + \frac{q^4 r^4}{\hbar^4 \cdot 5!} + \dots \right].$$

Nach Ableitung nach dq^2 bleibt für $q^2 = 0$ nur der Term $-\frac{r^2}{\hbar^2 \cdot 3!}$ übrig, so dass gilt

$$\left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} = -\frac{4\pi}{6\hbar^2} \int_0^\infty dr r^4 \rho(r) = -\frac{e}{6\hbar^2} \langle r^2 \rangle.$$

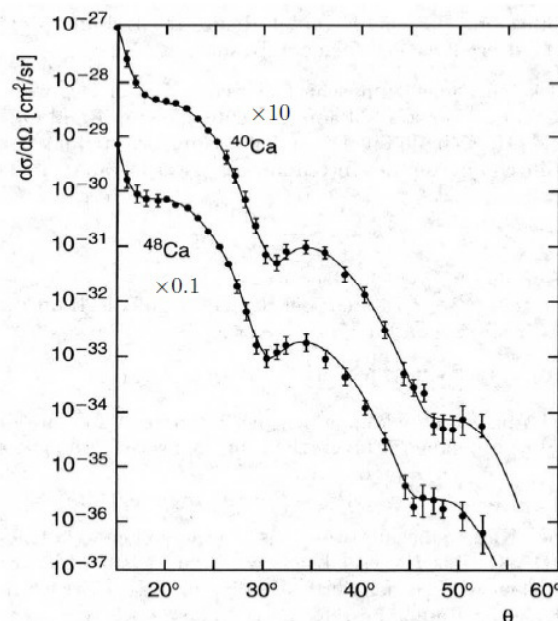
10.4 Formfaktor II (1 Punkt)

- a) Ein Kern kann in erster Näherung als homogen geladene Kugel mit Radius R betrachtet werden. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme der Formfaktor

$$F(q^2) = 3 \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^3} \quad \text{mit } x = \frac{q \cdot R}{\hbar} \text{ und } r \leq R \text{ ist.}$$

- b) Berechnen Sie $F(q = 0)$.
- c) Ermitteln Sie die ersten drei positiven Nullstellen von $F(x)$.
- d) In der Abbildung ist der gemessene Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für die Streuung von Elektronen mit einer Energie von $E = 750$ MeV an ^{40}Ca and ^{48}Ca in Abhängigkeit vom Streuwinkel aufgetragen. Welchen Streuwinkeln entsprechen die im vorherigen Aufgabenteil ermittelten Nullstellen? Bestimmen Sie daraus den Kernradius R der beiden Isotope.

Hinweis: Für die Winkelabhängigkeit des Impulstransfers verwenden Sie die Formel aus Aufgabe 10.2. Zur Lösung von b) und c) können Sie z.B. <http://www.wolframalpha.com> verwenden.



Musterlösung:

6.1 b) Volumen einer Kugel $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$g(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

in (1) einsetzen

$$\begin{aligned} F(q) &= 4\pi \int_0^R \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr \\ &= 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr \\ &= \frac{3}{qR^3} \int_0^R \sin(qr) r dr \\ &= \frac{3}{qR^3} \left(\left[-r \frac{1}{q} \cos(qr) \right]_0^R - \int_0^R -\frac{1}{q} \cos(qr) dr \right) \\ &= \frac{3}{q^2 R^3} \left[-r \cos(qr) + \frac{1}{q} \sin(qr) \right]_0^R \\ &= \frac{3}{q^2 R^3} \left(-R \cos(qR) + \frac{1}{q} \sin(qR) \right) \\ &= \frac{3}{q^3 R^3} \left(\sin(qR) - \frac{R \cdot q}{1} \cos(qR) \right) \\ &= \frac{3}{x^3} \left(\sin x - x \cdot \cos x \right) \quad \text{mit } x = \underline{\underline{q \cdot R}} \end{aligned}$$

6.1 c) $F(q=0) = ?$

Taylorentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$F(q=0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cdot \cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(x - \frac{x^3}{6} - x \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

d) mit $F(x) = 0$

$$\sin x - x \cdot \cos x = 0 \quad \leadsto \quad x = \tan x$$

Die Nullstellen von $F(x)$ lassen sich aus den Schnittpunkten der Funktionen $f(x) = x$ und $f(x) = \tan x$ bestimmen (s. plot).

Numerisch können die Nullstellen z.B. mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{\sin x_n - x_n \cdot \cos x_n}{\cos x_n - \cos x_n + x_n \cdot \sin x_n} = x_n - \frac{1}{x_n} + \cot x_n$$

(Tangente der Fkt. bestimmen, Nullstelle der Tangente als Näherung der Nullstelle der Funktion verwenden) (3)

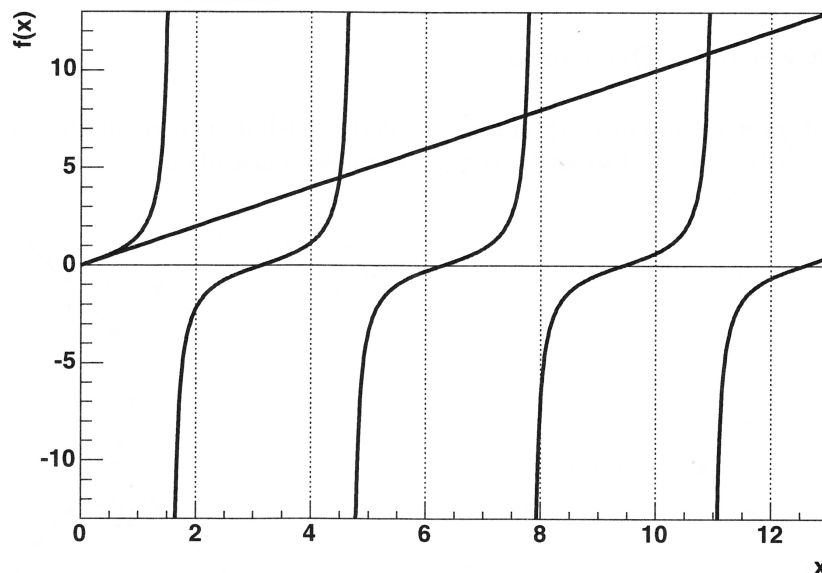
6.1 d) Aus der graphischen Darstellung ergeben sich
 (continued) nach drei Iterationen folgende Nullstellen:

$$x_1 = 4.493$$

$$x_2 = 7.725$$

$$x_3 = 10.904$$

$$f_1(x)=x, f_2(x)=\tan(x)$$



6.1 e)

$$x = q \cdot R$$

$$\text{Impuls-Transfer } |q| = 2p \sin \frac{q}{2}$$

$$R = \frac{x}{q} = \frac{x}{2p \sin \frac{q}{2}} = \frac{x}{2E \sin \frac{q}{2}} \quad \text{für } p \gg mc$$

Die Minima des Wirkungsquerschnitts entspricht den
 Nullstellen von $F(x) \rightarrow$ Radius bestimmen

$$q = \theta$$

^{40}Ca

^{48}Ca

$$\theta_1 = 18^\circ \quad R = 3.77 \text{ fm}$$

$$\theta_1 = 17^\circ \quad R = 3.99 \text{ fm}$$

$$\theta_2 = 31^\circ \quad R = 3.8 \text{ fm}$$

$$\theta_2 = 30^\circ \quad R = 3.92 \text{ fm}$$

$$\theta_3 = 47^\circ \quad R = 3.59 \text{ fm}$$

$$\theta_3 = 45^\circ \quad R = 3.74 \text{ fm}$$

Einheitlich!

$$R = \frac{\hbar c \cdot x}{2E \sin \frac{q}{2}}$$

Der mittlere Radius ~~bestimmt~~ ^{ist} somit $R = 3.72 \text{ fm}$ für ^{40}Ca
 und $R = 3.88 \text{ fm}$ für ^{48}Ca .

④

