

VI. Kern- und Nukleonstruktur

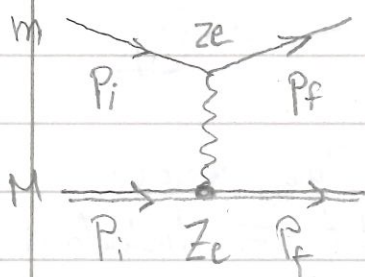
Streuexperimente und ihre Interpretation sind Schlüssel zu Struktur von Kernen und Nukleonen (Protonen).

1. "Rutherford-Streuung" an punktf. Ladungsverteilungen.

H. Geiger et al., 1909-1913 s. ABG VI. 1: $\alpha \rightarrow$ Goldfolie

Frage: Warum hat Rutherford aufgrund der Resultate geschlossen, daß Kerne punktf. sind? Was würde man für ausgehende Kerne erwarten?

1.1 Theoretische Behandlung: elastische Streuung eines "leichten" spinlosen Teilchens mit Lad. ze am schwerem (ruhmndm) "spinlosen" Streuzentrum Ze.



$$\text{Übergangsampl.: } A_{fi} = \frac{zeze}{q^2} \cdot \frac{(\hbar c)^3}{c^2} \quad (\text{s. III.5})$$

$$\left[\text{bzw. } |A_{fi}|^2 = \left(\frac{zZ\alpha}{q^2} \right)^2 (4\pi)^2 \frac{(\hbar c)^6}{c^4} \right]$$

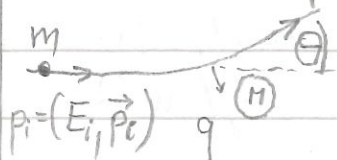
(hier keine Spins!)

M.1 der WD-Formel aus Kap. III.4:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{1}{\beta_i \beta_f} \frac{|\vec{p}_f|^2 c^2}{|\vec{p}_i|} \left\{ \left(\frac{zZ\alpha}{q^2} \right)^2 (4\pi)^2 \frac{(\hbar c)^6}{c^4} \right\} \sim \frac{1}{q^4}$$

β_f bzw. $|\vec{p}_f|$

Kinematik: q^2 für elastische Streuung



$$\begin{aligned} q^2 &= (p_i - p_f)^2 = (E_i - E_f)^2 - (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 \\ &= -(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = -\vec{q}^2 < 0 \\ &= -4|\vec{p}_i|^2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

für $M \gg m$: Rückstoß vernachlässigbar.

$$E_i = E_f$$

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \text{ bzw. } \beta_i = \beta_f$$

$$\text{bzw. } |\vec{q}| = 2|\vec{p}_i| \sin \frac{\theta}{2}$$

($\rightarrow$ Übungsaufgabe)

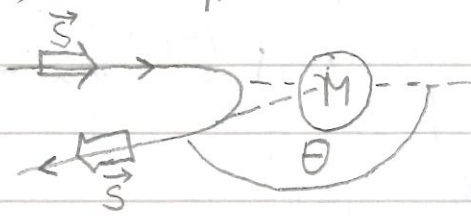
Mit $\beta_i = \beta_f$ folgt für $\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{q^4} \approx \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ und mit

"Rutherford Streuformel"	$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot (\hbar c)^2$	} Nicht relativistisch $p\beta c = 2E_{kin}$
	$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{Rutherford} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot (\hbar c)^2$	

- Bem.:
- 1) endl. Wahrscheinlichkeit für Rückwärts-Streuung
 - 2) für kleine Streuwinkel $\theta \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 0$): $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ steigt an.
Allerdings: in Realität max. Stoßparameter $\rightarrow$ mindestens q !
 - 3) Stoßpartner erscheint so lange phpf. wie $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} > R_{Stuhl}$.

1.2 Streuung von Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen (z.B. e^-) (= Mott-Streuung)

Bisher wurde Spin des Projektils nicht berücksichtigt. Häufig werden Streuexperimente mit Elektronen ($s = \frac{1}{2}$) durchgeführt. Für hochrelativistische Teilchen ($\beta \rightarrow 1$) ist die Helizität = Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung des Teilchens eine Erhaltungsgröße ($H = \frac{\vec{S}}{\hbar} \cdot \hat{p}$)
 $\rightarrow$ Drehimpuls erhalten + Helizitätserhaltung unterdrückt Rückwärts-Streuung:



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Spin} = \left(\dots \right)_{\text{ohne Spin}} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \beta \approx 1$$

Für den Fall $\beta < 1$ ist die Spinausrichtung (Helizität) keine erhaltene Observable. Man erhält dann für diff WQ:

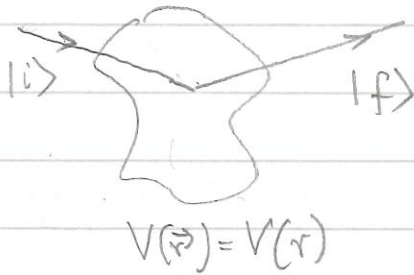
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Mott-Streuformel beschreibt Streuung pkl. Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen am punktf. Spin-0 Target.

1.3 Nachtrag: Feynman-Propagator $\frac{1}{q^2}$ und WW-Potential

Propagator $\frac{1}{q^2}$ wurde in der Vorlesung ad-hoc und ohne Bezug zum WW-Potential eingeführt. Man findet aber dass das $\frac{1}{q^2}$ Prop. die Fourier-Trf. eines $\frac{1}{r}$ Potentials im Impulsraum ist.

Streuung an stationärem sphärisch symmetr. Potential



Born'sche Näherung:

Ein- und Auslaufende Teilchen werden durch Wellenfkt. des freien Teilchens beschrieben

$$\psi_{i,f} = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_{i,f} \cdot \vec{r} - E_{i,f} t)\right)$$

Übergangsamplitude: $A_{fi} = \langle f | V(r) | i \rangle = \iint \psi_f^* V(r) \psi_i d\vec{r} dt$

$$= \frac{1}{V} \cdot \int_t \int_V \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_f \cdot \vec{r} - E_f t)\right) V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i \cdot \vec{r} - E_i t)\right) dt d\vec{r}$$

Zeitintegration liefert $\delta(E_f - E_i) = \text{Energieerhaltung}$

$$\Rightarrow A_{fi} \sim \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\underbrace{\vec{p}_i - \vec{p}_f}_{\vec{q}}) \cdot \vec{r}\right) d\vec{r}$$

$$\sim \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}\right) d\vec{r}$$

d.h. A_{fi} ist in der Tat die Fourier-Trf. von $V(r)$ im Impulsraum q .

Für $V(r) = \frac{C}{r}$ findet man $A_{fi}(\vec{q}^2) \sim \frac{C}{|\vec{q}|^2} \Rightarrow \text{Propagator}$

$$\left(\text{Für } V(r) = \frac{C}{r} e^{-r/a} \Rightarrow A_{fi}(\vec{q}^2) \sim \frac{C}{\vec{q}^2 + (\hbar/a)^2} \right)$$

Potential mit Dämpfung!

2. Streuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen und Kernstruktur

2.1 Ausgedehnte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = e f(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

Erinnerung: elektr. Pot. $\phi(\vec{r})$
 $V(r) = e \phi(\vec{r})$
 $\Delta \phi = -\rho(\vec{r})$

Mit elektr. Potential und Green'schem Theorem
 für skalare Felder u, v : $\int (u \Delta v - v \Delta u) d\vec{r} = 0$
 Setzt $\Delta e^{i\vec{q}\vec{r}} = -\vec{q}^2 e^{i\vec{q}\vec{r}}$ folgt:

$$\begin{aligned} A_{fi} &= \int V(\vec{r}) e^{i/\hbar \vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \\ &= -\frac{e\hbar^2}{\vec{q}^2} \int \Delta \phi(\vec{r}) e^{i/\hbar \vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \\ &= +\frac{e\hbar^2}{\vec{q}^2} \int \rho(\vec{r}) e^{i/\hbar \vec{q}\vec{r}} d\vec{r} = \frac{e^2\hbar^2}{\vec{q}^2} \int f(\vec{r}) e^{i/\hbar \vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \\ &= \frac{e^2\hbar^2}{\vec{q}^2} F(\vec{q}) \end{aligned}$$

$\int \phi(\vec{r}) (-\vec{q}^2 e^{i\vec{q}\vec{r}}) d\vec{r} = \int \Delta \phi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$
 $\rho(\vec{r}) = e f(\vec{r})$ mit $\int f(\vec{r}) d\vec{r} = 1$

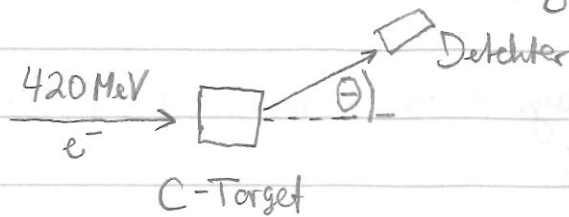
$F(\vec{q}) = \text{Fourier Trf. der Ladungsverteilung } f(\vec{r})$
 $= \text{Formfaktor}$
ursprüngliche Amplitude für kugelsymmetr. Ladungsverh.: $F(\vec{q}) = F(\vec{q}^2)$

Für den WR der Streuung eines phtf. Teilchens an einer kugelsymmetr. Ladungsverteilung $\rho(r)$ erhält man:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Phtf.}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

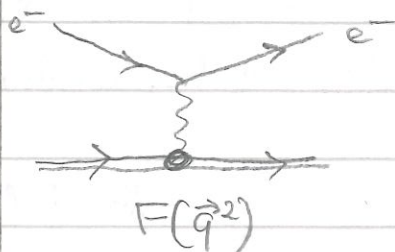
- Bem. (1) $|F(\vec{q}^2)|^2 < 1$, d.h. WR ist immer kleiner als phtf. WR
- (2) für kleine $\vec{q}^2 \rightarrow$ ausgetauschtes Photon hat große Wellenlänge (bzw. Streuker nicht auflösbar): $|F(\vec{q}^2)|^2 \rightarrow 1$

2.2 Elektron-Kern-Streuung;

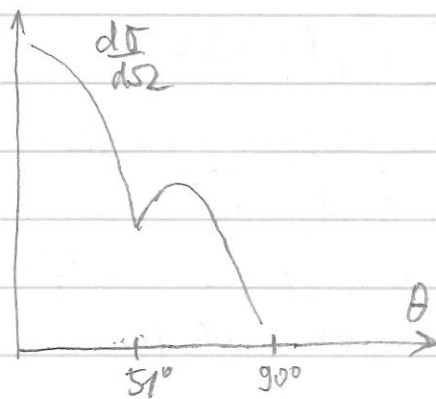


Hofstadter 1957

Stanford 500 MeV Linear beschl.
s. Abb. VI. 2a + 2a



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Moh}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

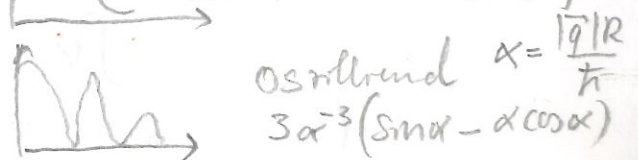
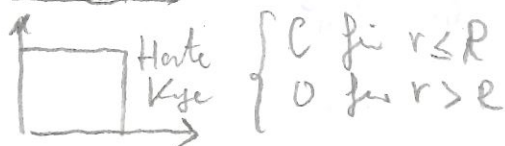
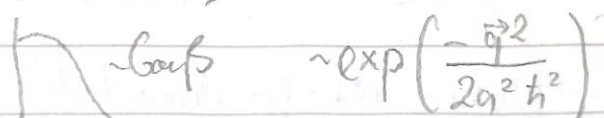
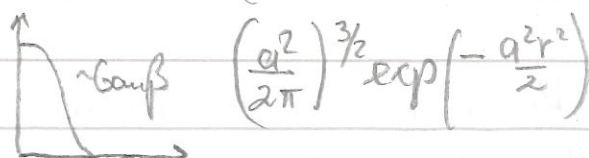
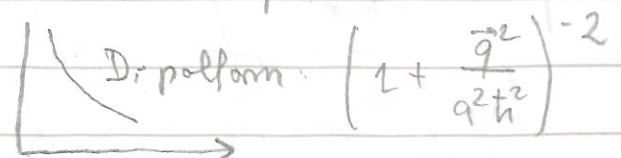
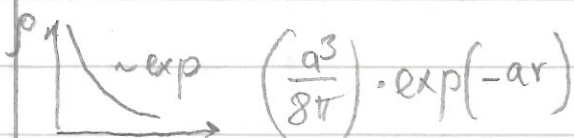
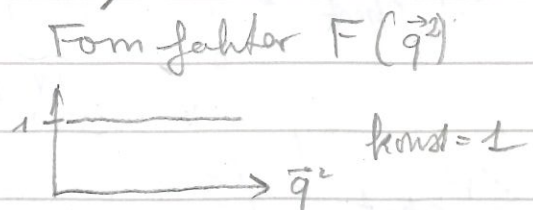
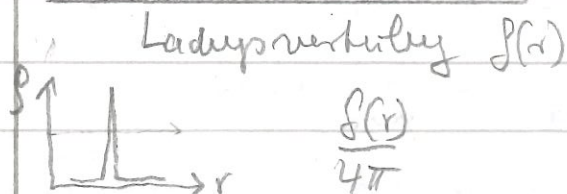


Aus diff. Wk. lässt sich $|F(\vec{q}^2)|^2$ bestimmen.
Aber, eine einfache Rücktransformation
zu Ermittlung der Ladungsverteilung ist
nicht möglich:

- (1) $|F(\vec{q}^2)|^2$ wird nicht für alle $\vec{q}^2$ gemessen
(fällt für ausgeklügelte Kerne für groß $\vec{q}^2$ stark ab)
- (2) Man braucht auch die Phase
(für Kugelsymmetrie ist $F(\vec{q}^2)$ reell!)

Stattdessen benutzt man Modellansätze zur Beschreibung von $\rho(r)$.
Die Fourier-Trf. des Modells wird dann an die Daten angepasst.

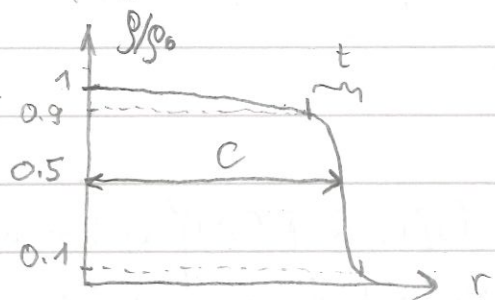
Beispiele (s. a. Abb. 3a und 3b)



2.3 Ladungsverteilung von Kernen:

Exp. Schwierigkeit: Je größer Ausdehnung desto stärker fällt $|F(\vec{q})|^2$ für große Winkel (große q^2) ab.

Für eine Vielzahl von Kernen wurde Ladungsverteilung bestimmt:
Ausgedehnte Kerne werden gut durch "Fermi-Verteilung" beschrieben



Radiale Ladungsverteilung: Abb. II.4

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

(weicher Rand)

im Povh

$$c = \text{Halbdichte Radius} \approx (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm} \approx 1.07 A^{1/3} \text{ fm}$$

$$t = \text{Oberflächendicke (10\%-90\%)}: 4 \ln 3 \cdot a = 4.4 a \approx 2.4 \text{ fm}$$

(bei großen Kernen etwa gleich dick) mit $a \approx 0.545 \text{ fm}$

Für mittlere und große A findet man näherungsweise für mittlere quadratischen Radius der Ladungsverteilung:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0.94 \cdot A^{1/3} \text{ fm} \quad (\text{S. II.1})$$

Oft werden Kerne auch näherungsweise durch Kugel mit hartem Rand² beschrieben, für die $\langle r^2 \rangle$ gegeben ist durch:

$$\langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = \int_0^R r^2 \rho(r) d\vec{r} = 4\pi \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3}}_{\substack{\text{Bem: } \rho(r) \text{ auf 1 normiert} \\ \text{Dichte homogener Kugel}}} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} R^2$$

$$\text{für } \langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = (0.94 A^{1/3} \text{ fm})^2 \Rightarrow R_{\text{hart}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot 0.94 A^{1/3} \text{ fm} = 1.2 A^{1/3} \text{ fm} \quad (\text{S. II.1})$$

Bemerkung: der harte Kugel soll gerade $\langle r^2 \rangle$ für reale Kerne sein.

Bem.: Für Nukleonendichte von Kernen findet man dann:

$$\rho_N = 0.17 \text{ Nukleon/fm}^3$$

(Nukleonendichte erhält man aus ρ , durch Multiplikation mit A/Z)

3. Struktur der Nukleonen (Proton und Neutron)

In diesem Abschnitt nur elastische Elektron-Nukleon-Streuung.

3.1 Nukleon Spin und magnetisches Moment.

p und n haben Spin $\frac{1}{2}$ und "anomale" magnetische Momente die vom magnetischen punkthf. Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen: $g = 2 + \text{QED-Korr.}$ abweichen $\rightarrow$ "innere Struktur" der Nukleonen. $\mathcal{O}(\alpha)$

Magnet. Moment von Nukleon N: $\vec{\mu}_N = g_N \cdot \mu_N \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$ mit $m_s = \pm \frac{1}{2}$
wobei μ_N (häufig auch μ_K) als Nukleon od. Kern-Magneton bezeichnet wird:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_N} \approx 3.15 \cdot 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{\text{T}} \approx 1/2000$$

(Vergleich Bohrmag. $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 5.79 \cdot 10^{-11} \frac{\text{MeV}}{\text{T}}$ für Elektronen)

$$\mu_p = g_p \cdot \mu_N \cdot m_s^p = \pm \frac{g_p}{2} \mu_N = \pm 2.79 \mu_N \text{ bzw. } g_p = 5.58$$

$$\mu_n = g_n \cdot \mu_N \cdot m_s^n = \pm \frac{g_n}{2} \mu_N = \mp 1.91 \mu_N \text{ bzw. } g_n = -3.82$$

3.2 Elektronstreuung am "punkthf" Spin $\frac{1}{2}$ Protonen

Hypothetisch: punkthf. $g_p = 2 + \text{QED}$

Neben der elektr. WW sowie des Effektes der Unterdrückung der Rückwärtsstreuung aufgrund der Helizitätsüberhaltung bei relativ.

Teilchen kommt es aufgrund des magn. Moments zu einer Spin-Spin WW

Für hochrelativistische Elektronen:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Dirac-WD}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M_p^2 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Helizitäts-Erhaltung

Spin-Spin WW $\rightarrow$ Spin-Flip
 $\rightarrow$ erhöht Rückwärtsstreuung

$$\text{mit } Q^2 = -q^2$$

1) Tw. Streuung ist $q^2 = (p_e - p_e')^2 < 0$ deshalb führt man die Variable $Q^2 = -q^2 > 0$ ein.

2) Spin-Spin WW:

$$\bullet \sim \frac{1}{M^2} \text{ wg. } \sigma \sim |\vec{A}_H|^2 \sim N_{Maj}^2 \sim \frac{1}{M^2}$$

$\bullet \sim Q^2 \rightarrow$ SpinSpin fällt stark mit Abstand (Stoßparameter) ab
 $\rightarrow$ kleiner Stoßparameter $\rightarrow$ hohes $Q^2 \rightarrow$ großer Effekt

benutzt man den Mott-WQ (Spin $\frac{1}{2}$ e^- am spinlosen phil. Proton)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left(1 + 2\tau \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

mit $\tau = \frac{Q^2}{4M_p^2 c^2}$

Der Dirac-WQ ist größer als Mott-WQ (zusätzlicher Effekt)

Bisher wurde der Rückstoß nicht berücksichtigt. Bei der Elektron-Proton-Streuung spielt Rückstoß aber eine wichtige Rolle und kann nicht mehr vernachlässigt werden:

$$E = E_{\text{Eing}} e^- \text{ vor Stos} \neq E' = E_{\text{Eing}} e^- \text{ nach Stos},$$

WQ mit Rückstoßkorrektur (gilt auch schon für Rutherford-Formel):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rückstoß}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott ohne Rückst}} \cdot \underbrace{\left(\frac{E'}{E} \right)}_{\text{Rückstoß Korrektur}} \cdot \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

3.3 Elektron-Proton Streuung für ausgehutes Proton ($g_p \neq 2$):

G_1 und G_2 bzw.

Es müssen nun 2 Formfaktoren $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$, die die elektrische und magnetische Verteilung beschreiben eingeführt werden.

Rosenbluth-Formel für WQ:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mohr}} \cdot \left[\underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}}_{A(Q^2)} + \underbrace{2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2}}_{B(Q^2)} \right]$$

Es ist zur Interpretation von G_E und G_M instruktiv das Verhalten für $Q^2 \rightarrow 0$ (d.h. „niedrige“ Auflösung des Photons)

zu betrachten:

$Q^2 \rightarrow 0$:

ep-Streuung

$$G_E^p(Q^2=0) = 1$$

$$G_M^p(Q^2=0) = +2,79 = g_p/2$$

„pHf“ Proton mit anomalem g_p

en-Streuung

$$G_E^n(Q^2=0) = 0$$

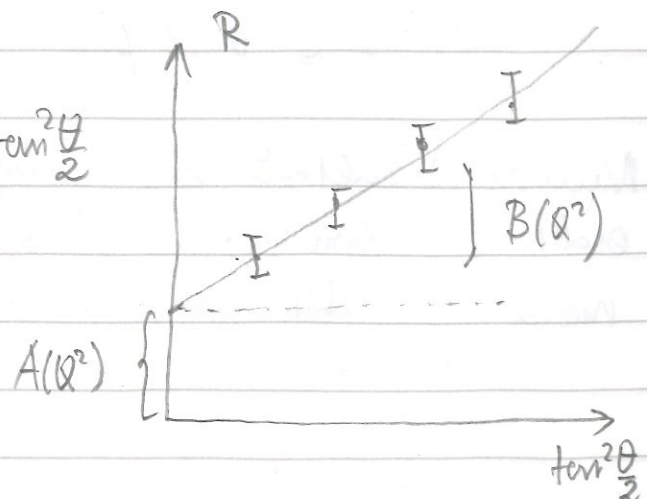
$$G_M^n(Q^2=0) = -1,91 = g_n/2$$

(in Einklang mit Kernmagneton μ_N)

Um $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ separat zu bestimmen, wird der WQ für feste Werte von Q^2 aber bei verschiedenen Streuwinkeln, d.h. für verschiedene Elektronen Energien, gemessen: Abb. (K.6)

$$R = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mohr}}} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

A, B s. oben.



Messungen wurden erstmals von Hofstadter und McKlister 1956 in Stanford mit 180 MeV Elektronenstrahl durchgeführt.

Resultate (s. Abb. VI. 5, 6 und 7)

(i) Formfaktoren gehorchen der Skalierungsregel

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(Q^2)}{\mu_n}$$

d.h. „elektrische“ und „magnet.“ Ausdehnung für p und n gleich,

$G_E^n(Q^2)$ für Neutronen vernachlässigbar (Neutron ist neutral)

(ii) Formfaktoren lassen sich durch Dipolformel beschreiben

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71^2 (\text{GeV}/c)^2} \right)^{-2}$$

= entspricht der FourierTf. einer Exp. Verteilung:

$$f(r) = f_0 e^{-ar} \quad \text{mit } a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$$

(iii) Mittlere quadrat. Radius des Protons und Neutrons:

$$\langle r^2 \rangle = -6 \hbar^2 \frac{dG_E^{\text{Dipol}}(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = \frac{12}{a^2} = 0.66 \text{ fm}^2$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.81 \text{ fm} \quad (\text{Stanford})$$

$$\approx 0.88 \text{ fm} \quad (\text{Nachfolge } e^- \text{-Experimente})$$

Neueste Resultate zeigen daß (1) Formfaktoren von exakter Dipolform abweichen und (2) bei hohen Q^2 auch magnet. und elektr. Formfaktoren voneinander abweichen.