

Aufgabenblatt 12 – Experimentalphysik IV – SS18

Diskussion in den Übungen: Do./Fr., 12./13. Juli

12.1 Lebensdauer des τ -Leptons (1 Punkt)

Das τ -Lepton zerfällt sowohl in Leptonen als auch in Hadronen. Damit ist es ein einzigartiges System zur Untersuchung der starken und der schwachen Wechselwirkung.

- Geben Sie die möglichen Zerfallskanäle in führender Ordnung für das Myon und das τ -Lepton an. Skizzieren Sie jeweils die Feynman-Diagramme (auf dem Parton-Level).
- Schätzen Sie die Verzweigungsverhältnisse der Zerfälle nach Elektronen, Myonen und Hadronen ab. Vernachlässigen Sie dabei Unterschiede im Phasenraum.
- Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen der Lebensdauer des Myons und der partiellen Zerfallsbreite $\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Regel von Sargent.

Lebensdauer des Myons:

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_W^2 m_\mu^5}{192\pi^3},$$

mit der schwachen Kopplungskonstanten G_W .

- Drücken Sie die Lebensdauer des τ -Leptons durch die partielle Zerfallsbreite $\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau)$ aus. Verwenden Sie das Resultat aus c) und die Lebensdauer des Myons, um die Lebensdauer des τ -Leptons abzuschätzen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit experimentellen Werten aus dem PDG.

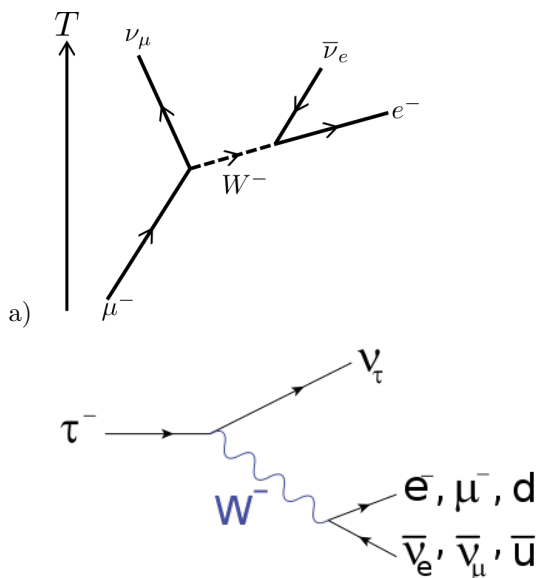
Hinweis:

Masse des Myons: $m_\mu = 105.6583715 \pm 0.0000035 \text{ MeV}/c^2$

Lebensdauer des Myons: $\tau_\mu = 2.1969811 \pm 0.0000022 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

Masse des τ -Leptons: $m_\tau = 1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}/c^2$

Musterlösung:



$W^- \rightarrow s, \bar{u}$ ist auch möglich.

- Myon: 100% nach Elektron.

τ -Lepton: Zerfall nach e : μ : Hadronen = 1:1:3 wegen des Farbfaktors, also ca. 20% nach Elektronen.

c) **Sargent's rule:**

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} = \frac{\hbar}{\tau_\mu}.$$

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3} = \frac{\hbar}{\tau_\mu} \cdot \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5.$$

d) Weitere Zerfallskanäle führen zu einer kürzeren Lebensdauer:

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e) = \frac{\hbar}{\tau_\tau} \cdot 0.2$$

$$\tau_\tau = 0.2 \cdot \tau_\mu \cdot \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5$$

$$\tau_\tau = 327 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

PDG Werte:

$$\tau_\mu = 2.1969811 \pm 0.0000022 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\tau_\tau = 290.3 \pm 0.5 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

Tatsächlich beträgt das Verzweigungsverhältnis 17.83%, damit kann man die Lepton-Universalität präzise testen.

12.2 Tröpfchenmodell, Bindungsenergie (1 Punkt)

- Bestimmen Sie die Protonenzahl $Z_{\min}$ für eine gegebene Massenzahl A , bei der die atomare Masse $m(Z)$ ein Minimum hat. Vernachlässigen Sie dabei die Paarungsenergie. Stellen Sie Ihr Ergebnis in einem $Z_{\min}(N)$ Diagramm dar, wobei $N = A - Z_{\min}$ gilt.
- Tragen Sie nun die Kernbindungsenergie je Nukleon $B(A, Z)/A$ als Funktion der Massenzahl A auf. Setzen Sie hierzu den Wert $Z = Z_{\min}$ aus a) ein. In welchem Massenbereich ist $B(A, Z)/A$ maximal?

Musterlösung:

Hinweis: Für den Asymmetrie-Energie-Term gibt es in der Literatur zwei unterschiedliche Definitionen mit um einen Faktor 4 unterschiedlichen Koeffizienten a_A . Hier wird die Konvention aus dem Skript mit $a_{\text{sym}} = 23.3 \text{ MeV}$ verwendet.

Die Massenformel lautet gemäß Skript:

$$M(A, Z) = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - B(A, Z),$$

mit der Bindungsenergie aus dem Tröpfchenmodell

$$B(A, Z) = a_V A - a_O A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}.$$

Da $A = \text{const.}$, muss N durch A, Z ausgedrückt werden.

$$B(A, Z) = a_V A - a_O A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}.$$

- a) Wir leiten die Massenformel partiell nach Z ab und bestimmen die Protonenzahl, für die die Ableitung null wird:

$$\frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} = m_p - m_n + a_{\text{sym}} \cdot \frac{-4(A-2Z)}{A} + 2a_C \frac{Z}{A^{1/3}} \quad (1)$$

$$= m_p - m_n + a_{\text{sym}} \cdot \frac{-4A + 8Z}{A} + 2a_C \frac{Z}{A^{1/3}} \quad (2)$$

$$= m_p - m_n - 4a_{\text{sym}} + \left(\frac{8a_{\text{sym}}}{A} + \frac{2a_C}{A^{1/3}} \right) Z \quad (3)$$

$$= m_p - m_n - 4a_{\text{sym}} + 2 \left(\frac{4a_{\text{sym}}}{A} + \frac{a_C}{A^{1/3}} \right) Z = 0 \quad (4)$$

$$Z_{\min} = \frac{A}{2} \frac{m_n - m_p + 4a_{\text{sym}}}{4a_{\text{sym}} + a_C A^{2/3}} \quad (5)$$

$$(6)$$

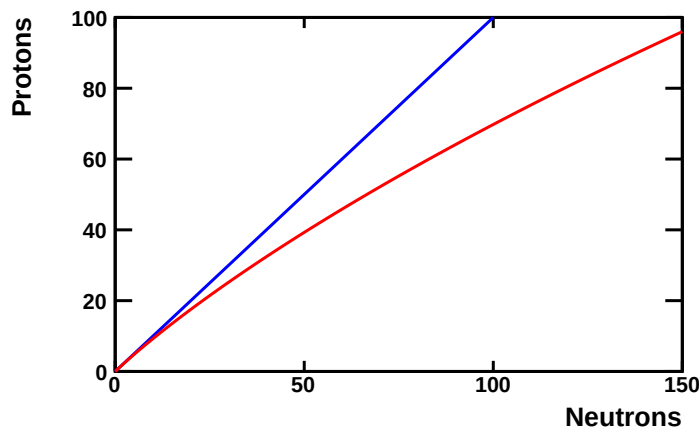
mit $m_n - m_p = 1.3 \text{ MeV}$, $a_C = 0.71 \text{ MeV}$ und $a_{\text{sym}} = 23.3 \text{ MeV}$ folgt

$$= \frac{A}{1.9725 + 0.01503 A^{2/3}} \quad (7)$$

Man berechnet für einen festen Wert von A , mit $A = 1 - 300$ den jeweiligen Wert von $Z_{\min}$. Die Anzahl der Neutronen ergibt sich aus $N = A - Z_{\min}$. Man erhält z.B. folgende Werte:

A	$Z_{\min}(N)$	N	element
16	7.7	8.3	$^{16}_8\text{O}$
62	28.1	33.9	$^{62}_{28}\text{Ni}$
100	43.5	56.5	$^{100}_{44}\text{Ru}$
208	83.2	124.8	$^{208}_{82}\text{Pb}$

Diese Linie der stabilsten Kerne (rote Linie) verläuft im $Z(N)$ -Diagramm unterhalb der Winkelhalbierenden $Z = N$ (blaue Linie) und entfernt sich von ihr für steigendes N .

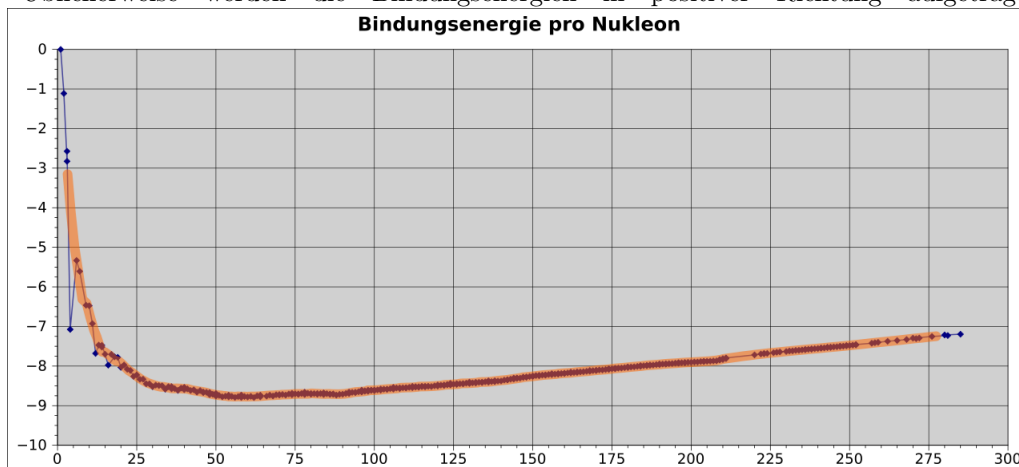


- b) In dieser Teilaufgabe wird nur die Kernbindungsenergie verwendet und durch A geteilt:

$$\frac{B(Z, A)}{A} = a_V - a_O A^{-1/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A-2Z)^2}{A^2} \quad (8)$$

Nun wird in diese Gleichung der Ausdruck für $Z_{\min}$ aus Teilaufgabe a) eingesetzt. Damit ergibt sich folgende Kurve. Die stabilsten Kerne befinden sich im Bereich $A \approx 60$, wie auch tatsächlich beobachtet. Der stabilste Kern ist ^{62}Ni (<http://dx.doi.org/10.1119/1.17828>).

N.B.: Üblicherweise werden die Bindungsenergien in positiver Richtung aufgetragen.



12.3 Energie der Kernspaltung (1 Punkt)

Ab einer gewissen Massenzahl A_0 können schwere Kerne spontan in zwei leichtere Kerne B_1, B_2 spalten.

- Ab welcher Massenzahl A_0 ist die Spaltung energetisch möglich unter der Annahme, dass sie symmetrisch verläuft, d.h. $B_1 = B_2 = A/2$? Verwenden Sie dabei die Näherung $Z \approx N$ für alle beteiligten Kerne.
- Betrachten Sie die Energiebilanz der symmetrischen Spaltung von Californium,
 $^{254}\text{Cf} \rightarrow ^{127}\text{In} + ^{127}\text{In}$.

Welcher Anteil der Californium-Masse wird in Energie umgewandelt?

Musterlösung:

- N.B.: Betrachte Terme in der Masse (nicht in der Bindungsenergie)
 Die Spaltungsenergie ist gegeben durch $E_f = -[B(Z, A) - 2B(Z/2, A/2)]$. Dadurch ergibt sich

$$E_f = a_O A^{2/3}(1 - 2^{1/3}) + a_C Z^2 A^{-1/3}(1 - 2^{-2/3}). \quad (9)$$

Aus der Bedingung $E_f \geq 0$ erhalten wir $A \leq 0.0551 Z^2$.

Mit der Annahme $Z \approx N$, also $Z \approx A/2$ ergibt sich

$$A \leq 0.0551 \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

oder

$$A \geq \frac{4}{0.0551} = 72.6.$$

Schwere Kerne spalten also spontan auf Grund der steigenden Coulombenergie.

Alternativ:

Mit dem Ausdruck für Z_0 aus 1a) ergibt sich

$$A \geq \frac{1}{0.0551} (1.9725 + 0.01503 A^{2/3})^2 \quad (10)$$

und mit <http://www.wolframalpha.com> die Lösung $A \geq 94.7$.

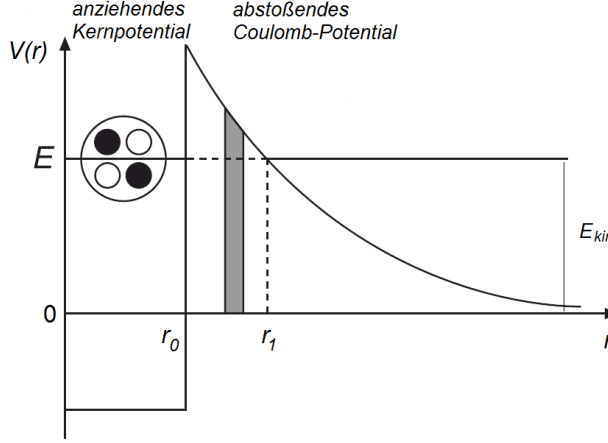
- b) Der Mutterkern ${}_{98}^{254}\text{Cf}$ zerfällt in zwei Tochterkerne ${}_{49}^{127}\text{In}$. Die Energien für den Oberflächenterm und den Coulomb-Term sowie die Spaltungsenergie (in MeV) sind in der Tabelle angegeben.

	Oberfläche	Coulomb	Summe
${}_{98}^{254}\text{Cf}$	691	1077	1768
$-2 \cdot {}_{49}^{127}\text{In}$	$-2 \cdot 435 = -870$	$-2 \cdot 339 = -678$	$-2 \cdot 774 = -1548$
E_f	-179	399	220

Die relative Energiefreisetzung beträgt $220/236681 = 0.09\%$.

12.4 Alpha-Zerfall (1 Punkt)

Der α -Zerfall eines Kerns mit (A, Z) lässt sich durch den Tunneleffekt qualitativ erklären (siehe Skizze). Hierbei durchtunnelt ein α -Teilchen mit der Gesamtenergie $E > 0$ die Coulomb-Barriere (vom Radius r_0 nach r_1), wobei r_0 etwa dem Radius des Tochterkerns ($A - 4, Z - 2$) entspricht. Das α -Teilchen wird weit entfernt vom Kern mit der kinetischen Energie E_{kin} detektiert, welche asymptotisch der Gesamtenergie E entspricht.



- Geben Sie die potentielle Energie eines α -Teilchens im Coulombpotential des Tochterkerns als Funktion des Abstands zur Mitte des Tochterkerns bei den Radien r_0 und r_1 an. Schätzen Sie r_0 aus der Massenzahl des Tochterkerns ab. Wie groß ist r_1 als Funktion von E und Z ?
- Für ein Wellenpaket mit Energie E ist die Tunnelwahrscheinlichkeit durch ein Kastenpotential der Höhe V und Dicke Δr gegeben durch:

$$T = e^{-2\Delta r \sqrt{2m(V-E)}/\hbar} \quad (11)$$

Für das Coulomb-Potential aus a) ist die Tunnelwahrscheinlichkeit durch

$$T = e^{-2G} \quad (12)$$

gegeben, wobei $x = r_1/r_0$. Der Gamow-Faktor G lautet

$$G = \int_{r_0}^{r_1} dr \sqrt{2m(V(r) - E)}/\hbar = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int dr \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} \quad (13)$$

und kann dargestellt werden als

$$G = 2(Z-2)\alpha \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \left(-\sqrt{x-1}/x + \arctan \sqrt{x-1} \right). \quad (14)$$

Wie hängt die Halbwertszeit $T_{1/2}$ von der α -Energie ab? Außerdem hängt die Halbwertszeit noch von der Wahrscheinlichkeit $w(\alpha)$ ab, daß sich ein α -Teilchen im Kern bildet und der Frequenz f , wie oft es gegen die Coulomb-Barriere läuft. Nehmen Sie an, dass $w(\alpha)$ gleich eins ist, d.h. stets ein α -Teilchen vorhanden ist, und die Frequenz grob abgeschätzt werden kann zu $f = \frac{v_\alpha}{2r_0}$, mit $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2$.

- Berechnen Sie die Halbwertszeiten der folgenden α -Strahler: ^{180}W ($E = 2.5 \text{ MeV}$) und ^{267}Ds ($E = 11.6 \text{ MeV}$).
- Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus c) mit experimentell gemessenen Daten. Welche Annahmen des Modells können Abweichungen verursachen?

Musterlösung:

- a) Das α -Teilchen hat die Ladung $z = 2$, der Restkern hat $(Z - z)$, somit ist das Coulomb-Potential

$$V(r) = 2\alpha\hbar c(Z - 2)\frac{1}{r} \quad \text{und } V_0 = V(r_0) \quad (15)$$

r_0 kann als der Radius des Tochterkerns angenähert werden.

$$r_0 = R_A \approx 1.2\text{fm}(A - 4)^{1/3} \quad (16)$$

r_1 ist der Abstand, ab dem die klassische Bewegung möglich ist, bei dem also $E = V$ gilt

$$V_1 = V(r_1) = 2\alpha\hbar c(Z - 2)\frac{1}{r_1} = E \quad \longrightarrow \quad r_1 = 2\alpha\hbar c(Z - 2)\frac{1}{E} \quad (17)$$

- b) _____

Herleitung, nicht verlangt:

Die differentielle Tunnelwahrscheinlichkeit ist

$$dT = \exp\left(-2dr\sqrt{2m(V(r) - E)/\hbar}\right) \quad (18)$$

Ein beliebiges Potential $V(r)$ lässt sich in als eine aus dünnen Rechteckbarrieren zusammengesetzte Potentialbarriere auffassen. Die Tunnelwahrscheinlichkeit ist dann das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten, also die Integration über den Exponenten. Mit $T = e^{-2G}$ ergibt sich der Gamow-Faktor

$$G = \int_{r_0}^{r_1} dr\sqrt{2m(V(r) - E)/\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int dr\sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} \quad (19)$$

Integral lässt sich durch die Substitution

$$u = \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} \quad r = \frac{r_1}{1 + u^2} \quad dr = \frac{-2r_1 u}{(1 + u^2)^2} du \quad (20)$$

auf folgende Form bringen ($u(r_1) = 0$):

$$G = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{u_0}^0 du \frac{-2r_1 u^2}{(1 + u^2)^2} = \sqrt{2mE} \frac{r_1}{\hbar} \int_0^{u_0} du \frac{2u^2}{(1 + u^2)^2} \quad (21)$$

Dieses Integral lässt sich dann lösen (oder nachschlagen):

$$\int_0^{u_0} du \frac{2u^2}{(1 + u^2)^2} = \left[\arctan u - \frac{u}{1 + u^2} \right]_0^{u_0} = \arctan u_0 - \frac{u_0}{1 + u_0^2} \quad (22)$$

somit

$$G = \sqrt{2mE} \frac{r_1}{\hbar} \left(\arctan u_0 - \frac{u_0}{1 + u_0^2} \right) \quad \text{mit} \quad u_0 = \sqrt{\frac{r_1}{r_0} - 1} = \sqrt{x - 1} \quad (23)$$

r_1 von oben einsetzen ergibt das gewünschte Ergebnis:

$$G = 2(Z - 2)\alpha\sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \left(-\sqrt{x - 1}/x + \arctan \sqrt{x - 1} \right). \quad (24)$$

$$G = 2(Z - 2)\alpha\sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \gamma(x). \quad (25)$$

Für $x \gg 1$ wird $\gamma = (-\sqrt{x-1}/x + \arctan \sqrt{x-1}) \approx \pi/2$ und damit

$$G \approx (Z-2)\alpha\pi\sqrt{\frac{2mc^2}{E}}. \quad (26)$$

Wir benutzen aber weiterhin Gl. (21).

Die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit λ setzt sich zusammen aus der Frequenz f , mit der das α -Teilchen gegen die Potentialbarriere stößt, der Tunnelwahrscheinlichkeit T bei einem einzelnen Stoß, und der Wahrscheinlichkeit, ein α -Teilchen im Kern zu finden $w(\alpha)$:

$$\lambda = fTw(\alpha) = fe^{-2G}w(\alpha) = \frac{v_\alpha}{2r_0}e^{-2G}w(\alpha) = \frac{\sqrt{2E/m}}{2r_0}e^{-2G}w(\alpha) \quad (27)$$

Die Halbwertszeit ist

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (28)$$

- c) Mit $w(\alpha) = 1$ und $m_\alpha = 3727\text{MeV}/c^2$ ergeben sich die folgenden Werte:

	E	Z	r_0	r_1	$x = r_1/r_0$	$\gamma(x)$	G	f (10^{21}s^{-1})
^{180}W	2.5 MeV	74	6.61 fm	82.8 fm	12.53	1.013	58.16	0.83
^{218}Po	6.1 MeV	84	7.17 fm	38.7 fm	5.39	0.737	30.85	1.20
^{267}Ds	11.6 MeV	110	7.69 fm	26.8 fm	3.49	0.553	22.11	1.54
	$T_{1/2}$	exp. $T_{1/2}$						
^{180}W	$8.67 \cdot 10^{21} \text{ a}$	$1.8 \cdot 10^{15} \text{ a}$						
^{218}Po	$364 \cdot 10^3 \text{ s}$	180 s						
^{267}Ds	7.2ms	3.1 μs						

Für ^{208}Pb mit $E \approx 0.517 \text{ MeV}$ (aus der Massendifferenz zu ^{204}Hg) ergeben sich Halbwertszeiten $> 10^{128} \text{ a}$.

- d) Dieses Modell kann qualitativ den sehr großen Bereich der Halbwertszeiten für α -Zerfälle über hier von mehr als 22 Größenordnungen beschreiben. Allerdings hängen die absoluten Werte empfindlich von der Wahl für r_0 ab. Beispielsweise führt bei ^{267}Ds eine relative Änderung von r_0 um 25% zu einer Änderung der Halbwertszeit um mehr als 3 Größenordnungen.

Mögliche Erklärungen für weitere Abweichungen:

- Es muss sich im Kern erst ein α -Teilchen bilden, hier ausgedrückt durch $w(\alpha)$
 - Die kinetische Energie im Kernpotential ist $E + V_0$, mit V_0 in der Größenordnungen der asymptotischen Energie.
 - Die Kerne haben keinen scharfen Rand, die errechneten Lebensdauern hängen stark von r_0 ab.
 - Nicht alle Kerne sind kugelförmig, für deformierte Kerne ergeben sich größere Abweichungen
 - Drehimpuls wird nicht berücksichtigt
 - ...
-