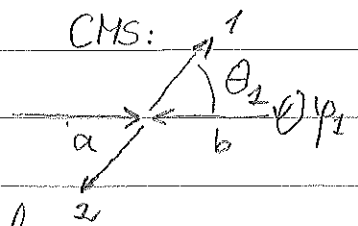
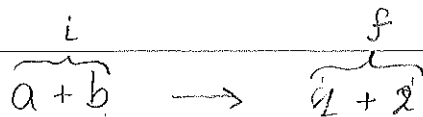


4.2 WQ für 2-Teilchenreaktion



WQ: $\sigma = \frac{1}{V_i} \frac{W_{fi}}{V_i} (V) \leftarrow \text{ignore Normierung vol.}$
 $V_i = \text{relativ. Geschw. } a \rightarrow b$

$$W_{fi} = \int \frac{2\pi}{h} |A_{fi}|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right)}_{\text{Zustandsdichte} = \text{Phasenraum}} p_1 d\Omega_1$$

(1) hochrelativistisch: $v_i \approx c \rightarrow \beta_i \approx 1$

(2) vernachlässige Massen auch im Endzustand: $m_{1,2} \ll E_{1,2}/c^2$

(3) CM-System: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ $\beta_f \approx 1$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow E_1 + E_2 &= 2p_1 c \\ \rightarrow E_1 \cdot E_2 &= p_1^2 c^2 \end{aligned} \right\} (*)$$

(4) Flussfaktor ^{relativ} zu Fixed-Target Konfiguration korrigiert werden

$$d\sigma = 2 \cdot \frac{2\pi}{h} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^3} \cdot \frac{p_1^2 c^2}{2p_1 c} p_1 |A_{fi}|^2 d\Omega_1 \quad \left[\text{mit } (*) \right]$$

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{\hbar^4 c^4} \cdot (p_1^2 c^2) |A_{fi}|^2 d\Omega_1$$

bzw $d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4} \right) \frac{p_1^2 c^2}{\beta_i \beta_f} \cdot |A_{fi}|^2 d\Omega_1$

für endliche Geschwindigkeiten

4.3 Zufallsbreite 2-Teilchenzerfall: $A \rightarrow 1+2$

$$d\Gamma = \hbar W_{fi} = \hbar \cdot \frac{2\pi}{h} |A_{fi}|^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{M c^2} p_1 d\Omega_1$$

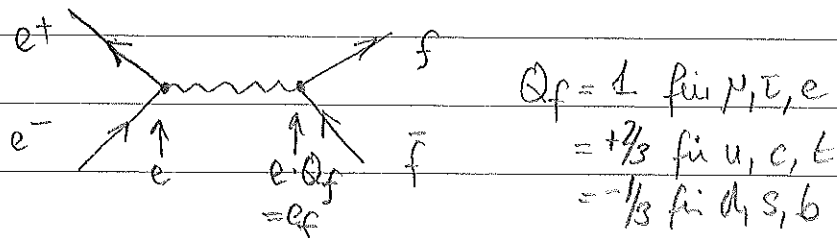
mit $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$

$$= \frac{|A_{fi}|^2}{(2\pi)^2 \hbar^3 c^3 c M} p_1 d\Omega_1 \sim \left(\frac{M c^2}{2} \right)^2 \cdot p_1 d\Omega$$

$A \rightarrow 1+1$

5. e^+e^- -Anihilation (als Beispiel)

$$e^+e^- \rightarrow f\bar{f} \text{ mit } f\bar{f} = (e^+e^-), \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, q\bar{q}$$



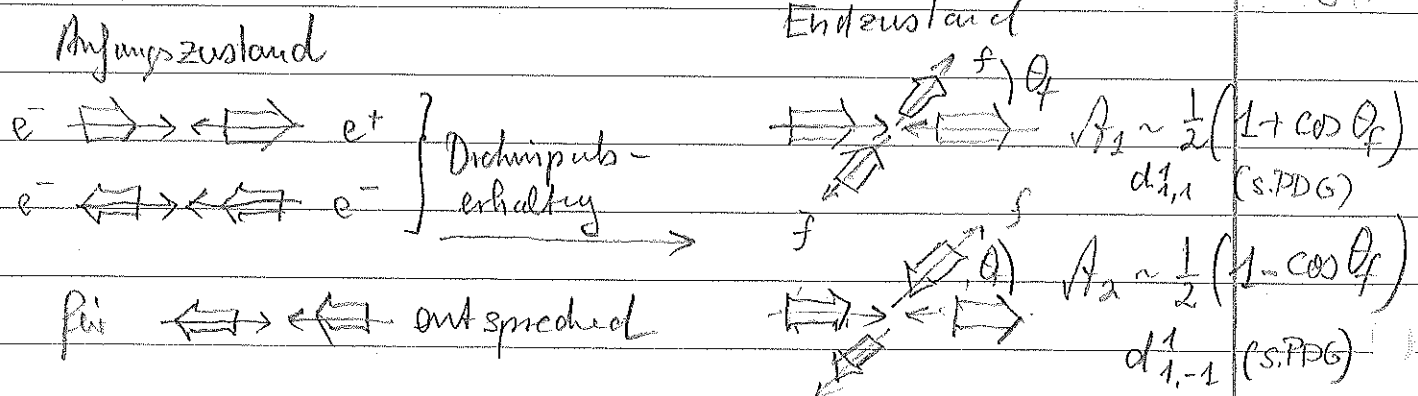
$$Q_f = 1 \text{ für } \mu, \tau, e \\ = +\frac{2}{3} \text{ für } u, c, t \\ = -\frac{1}{3} \text{ für } d, s, b$$

$$A_{fi} \sim e \frac{1}{q^2} e_f \sim \frac{4\pi\alpha}{q^2} \cdot Q_f \cdot \left(\frac{\hbar c}{c} \right)^3 \left. \begin{array}{l} \text{Faktor beidseits} \\ \text{Dimensionen} \\ (\text{auch } V=1) \end{array} \right\}$$

(in Folgenden $Q_f = 1$)

Die hier angegebene Amplitude ignoriert die Spins von Photon ($Spin=1$) und Fermionen ($Spin=\frac{1}{2}$). Erlaubte Kombinationen wg. Photonspin $\eta=1$ und Drehimpuls-Erhaltung:

s. Abb. III.5:



$\Rightarrow$ Addition der einzelnen Spinamplituden sowie Mittelung über Anfangskonfigurationen

$$|A_{fi}|^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum |A_i|^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f) \cdot \frac{(4\pi\alpha)^2}{q^4} \cdot \left(\frac{\hbar c}{c} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f) \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} (\hbar c)^3$$

Mit W Klaus(4): $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{E_{CMS}^2}{4} \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} (\hbar c)^6 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_f)$

$$= \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{E_{CMS}^2} (1 + \cos^2 \theta_f) (\hbar c)^2$$

Integration über $\cos \theta_f$:

$$G_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \cdot \frac{1}{E_{CMS}^2} (\hbar c)^2 = \frac{87 \text{ nb}}{E_{CMS}^2 (\text{GeV}^2)} \left. \begin{array}{l} \text{s. Abb. III.6} \\ ee \rightarrow \mu\mu \end{array} \right\}$$

$\underbrace{E_{CMS}}_{=s}$

Bemerkungen

- G_{tot} ignoriert die Massen des Endzustands Teilchen:
 $G_{\text{tot}}(ee \rightarrow f\bar{f}) = 0$ für $E_{\text{cms}} < 2m_f$

- für $Q_f \neq 1$: $G_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \cdot Q_f^2 \cdot \frac{1}{E_{\text{cms}}^2} \cdot \left(\frac{1}{h} c\right)$

(Achtung: für $q\bar{q}$ muß man auch noch die Farbladung berücksichtigen)
 $\rightarrow q\bar{q} \cdot \underbrace{(\bar{r}r + g\bar{g} + b\bar{b})}_{\times 3} \Rightarrow \text{später}$

6.) Lorentzinvarianter Phasenraum

s. Abb III.7a

s. Abb III.7b

Weder Fermi's Goldene Regel noch der Phasenraumfaktor sind in der angegebenen Form Lorentzinvariant.

Lorentzinvariante Formulierung: $\omega = \frac{2\pi}{h} \underbrace{\frac{|M_{fi}|^2}{\prod 2E_i}}_{\text{alt initial-state Teilchen}} \cdot \rho$

$$\rho = \frac{d}{dE_{\text{tot}}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \cdot \int \frac{d^3p_1}{2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{2E_n}$$

Lorentzinvariantes Maß

M_{fi} = Lorentzinvariante Übergangsamplitude

Beispiel: Zweikörperstreuung

Man findet für den 2-Teilchen WQ

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4} \right) \frac{1}{s} \cdot |M_{fi}|^2 d\Omega_1$$

bzw für die Zerfallsbreite $A \rightarrow 1+2$:

M (Masse von A)

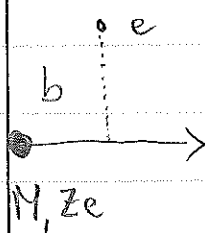
$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{M^2} \cdot |M_{fi}|^2 d\Omega_1$$

IV Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

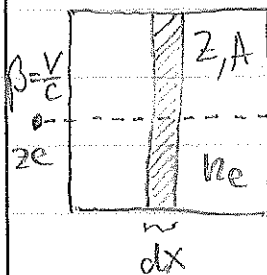
1. Energieverlust geladener Teilchen durch Ionisation

(dominiert nur für „Schwache“ geladene Teilchen; Elektronen weitere Effekte)
→ später

Beim Durchgang durch ein Medium ionisieren gelad. Teilchen Atome und verlieren Energi:
E-Feld der bewegten Ladung übt eine Kraft auf die gebundenen Elektronen aus und ionisiert die Atome aufgrund des Impulsübertrags.



Mittlerer Energie/Impulsübertrag ergibt sich durch Integration über die möglichen Stoßparameter und unter Berücksichtigung quantenmechanischer Effekte.
→ genaue Rechnung schwierig.



$$m_e = 511 \text{ keV}/c^2$$

Mittlerer Energieverlust $-dE$ pro Strecke dx wird durch die Bethe-Block-Formel beschrieben:

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\rho \cdot N_A \cdot \frac{Z}{A} \right) \frac{4\pi^2 z e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 \right)$$

$= n_e = \text{Elektronendichte im Medium}$

I = mittleres Ionisationspotential der Elektronen;

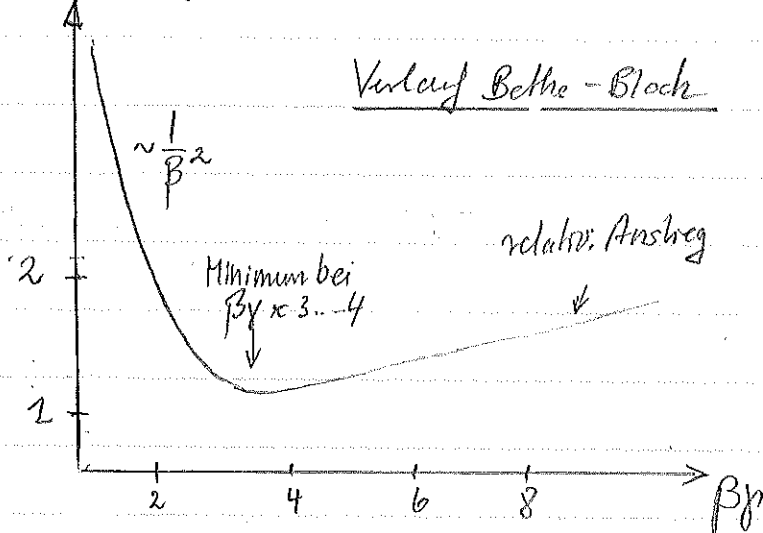
für $Z > 20$: $I \approx 10 \cdot Z \text{ eV}$

Häufig wird statt der Größe $-dE/dx$ die Größe $-dE/dx \cdot \frac{1}{\rho}$ angegeben, die eine geringere Materialabhängigkeit aufweist:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = K \cdot \frac{Z}{A} z^2 \frac{1}{\beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 \right)$$

mit $K = 0.307 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{g}} \text{cm}^2 \right]$$



Bsp.: Alu, $\rho = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\min} \approx (1-2) \times 2,7 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}^2}$$

Abb. IV.1

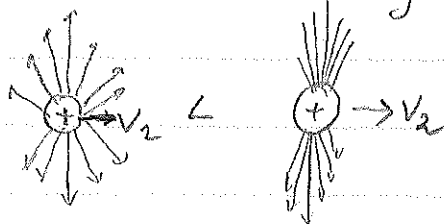
Diskussion der $Z\beta$ -Abhängigkeit

(1) bei kleinem ($Z\beta$): $\frac{dE}{dx} \sim \frac{1}{\beta^2}$: starke Ionisation von langsamen Teilchen (Teilchen "bleiben schnell stecken")

(2) Minimum für $Z\beta \approx 3-4$ bei typ. Energieverlust von $1-2 \frac{\text{MeV}}{\text{g}} \text{cm}^2$

(3) Relativistische Anstieg für große $Z\beta$:

aufgrund des Lorentz-Boostes nimmt transversale E-feld Komponente stark zu.



Bem.: Der spezifische Energieverlust $\frac{dE}{dx}$ kann bei Kenntnis des Impulses zur Teilchenidentifizierung benutzt werden.

Bragg-Peak: Abstoppen von Teilchen

Aufgrund der starken Impulsabhängigkeit ($Z\beta = \frac{p}{m} = \beta$)

kann es beim Abbremsen der Teilchen zu einem immer stärkeren

Energieverlust ($\sim 1/\beta^2$) $\frac{dE}{dx}$ als Funktion der Eindringtiefe:

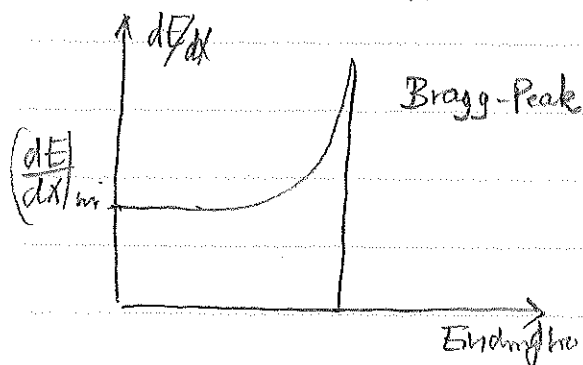


Abb. IV.2b

Anstieg macht man sich beispielsweise bei der Strahlentherapie zu nutzen. Durch Wahl der Strahlenergie kann man max. Energieverlust gerade auf die Tiefe des Tumors "einstellen".

2. Energieverlust von Elektronen

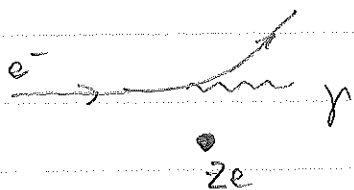
Neben dem Energieverlust durch Ionisation existiert bei „schnellen“ Elektronen noch ein weiterer Effekt, der bei hohen Energien dominiert: Bremsstrahl.

$$-\frac{dE}{dx} = -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} - \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems.}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Kritische Energi } E_c \\ (dE/dx)_{\text{ion}} \propto (dE/dx)_{\text{Brems.}} \\ \text{Materialabhängig (s.u.)} \\ E_c \approx 560 \text{ MeV}/Z \end{array} \right\}$$

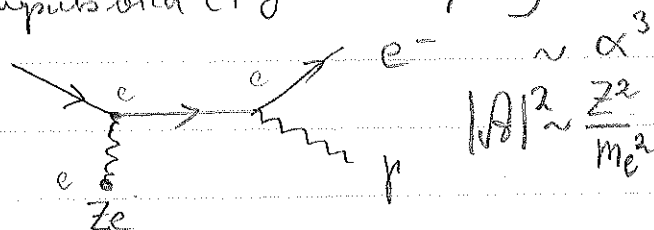
Der Energieverlust durch Ionisation wird im Wesentl. durch die Bethe-Bloch Formel beschrieben. Wesentlicher Unterschied zu schweren Teilchen: m_e klein $\rightarrow$ stärkere Ablenkung & Max. Energieübertrag $= \frac{1}{2} E_{\text{kin}}$

Energieverlust durch Bremsstrahl.

Ortsbreit



Impulsbreit (Feynman-Diagramm)



für große Elektronenenergien E findet man (Bethe Heitler):

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}} = 5 \cdot 4\pi N_A \frac{Z^2}{A} \cdot r_e^2 \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \cdot E$$

$$r_e^2 = \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right]^2 \sim \frac{1}{m_e^2}$$

$$\sim \frac{1}{m_e^2} \sim \frac{1}{Z^2} \sim \rho \frac{N_A}{A} \sim \text{Dichte des Streuers}$$

Abb. IV.3

(Strahlungsleistung)
Tabelle

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems}} = \frac{1}{X_0} \cdot E \quad (*)$$

X_0 ist eine materialabh. Konstante und wird als Strahlungslänge bezeichnet.

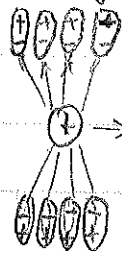
Aus der obigen DGL (*) folgt für $E(x)$: $E(x) = E_0 e^{-x/X_0}$

D.h. nach Strahlungslänge X_0 ist Elektronenenergie auf $1/e$ (37%) abgefallen.

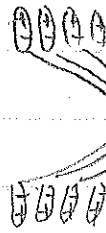
3. Cherenkov-Strahlung für geladene Teilchen

entsteht beim Durchgang geladener Teilchen durch Materie falls
 $v_{\text{Teilch}} > \frac{c}{n}$ = Lichtgeschwindigkeit im Medium (n = Brechungsindex)

Anschaulich:



$$\beta < \frac{1}{n}$$



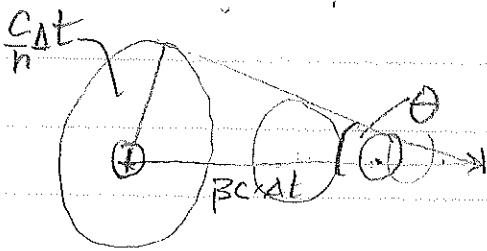
$$\beta > \frac{1}{n}$$

Polarisation des Mediums
 $\rightarrow$ Teilw. Abschirmung der Ladg $\rightarrow$ Dichtefehl S

Zell. verändertes Dipolmoment
 $\rightarrow$ Abstrahlung von Photonen ($\lambda = 400 \dots 700 \text{ nm}$)

Energieverlust durch Cherenkov-Strahl ist sehr klein ($-\frac{dE}{dx} \approx 10^{-3} \frac{\text{MeV}}{\text{g cm}^2} \approx 1\%$)
 und ist bereits durch die Bethe-Bloch-Gleichg. berücksichtigt.

Die Eigenschaft der Cherenkov-Strahl kann aber zur Teilchenmessung benutzt werden:



Cherenkov-Strahl wird auf Kegel mit Öffnungswinkel θ_c ausgestrahlt:

$$\cos \theta_c = \frac{c/n}{\beta c} = \frac{1}{\beta n}$$

(„Kopfwelle“ wie bei Überschallkanal)

$\rightarrow$ Cherenkov Strahl kann zur Messung der Geschwindigkeit $\beta = v/c$
 bzw., falls man den Impuls des Teilchens kennt
 auch zur Teilchenidentifikation benutzt werden.

S. Abb. IV.4

Zusatzinformationen (nicht behandelt):

Bei Vernachlässigung der Wellenlängenabh.
 des Brechungsindex (Dispersion) im opt. Bereich:

bzw.

$$\frac{dN_\gamma}{d\lambda} = \frac{(2\pi\alpha) z^2 \sin^2 \theta_c}{\lambda^2} \cdot \Delta x$$

$$N_\gamma = (2\pi\alpha) z^2 \sin^2 \theta_c \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Für sichtbares Licht
 ($\lambda = 400 \dots 700 \text{ nm}$)

$$N_\gamma \approx 490 \sin^2 \theta_c \text{ 8/cm}$$

4. Wechselwirkung von Photonen mit Materie

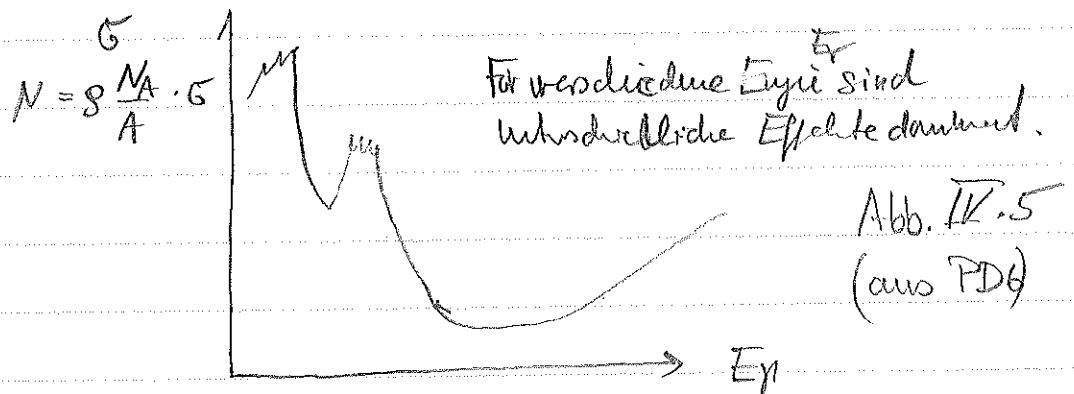
WW führt zur Absorption der Photonen und damit zur Abschwächung der Intensität der einfallenden Photonen (s. Atomphysik, ^{Röntgenabsorption}).

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad \mu = \text{Absorptionskoeff.}$$

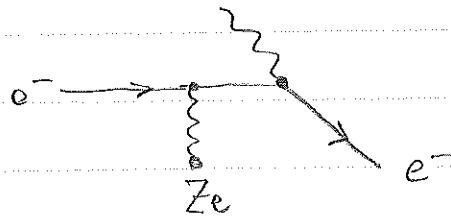
Neben dem Photoeffekt existiert der Compton-Effekt und die Möglichkeit der Paarbildung ($\gamma \rightarrow e^- e^-$). Absorptionskoeff. ($\mu \sim G \cdot Z^4$)
¹⁰ $\frac{1}{2}$ für Wglang

$$\mu = \mu_{\text{Ph}} + \mu_{\text{C}} + \mu_{\text{Paar}}$$

(Daneben existiert noch die Streuung von Photonen an einzelnen freien e^- (Thomson-Streuung) bzw. die kohärente Streuung an Elektronenhülle des Atoms: keine Ionisation bzw. Anregung; kein Energietransfer)



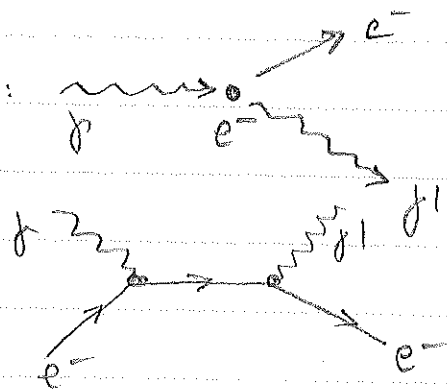
4.1 Photo-Effekt



Photon wird absorbiert und überträgt seine Energie vollständig an Elektron. Aufgrund von 4er-Impulserhaltung nur für geb. Elektronen (zusätzliches Stoßpartner) möglich: Effekt am größten für die am stärksten gebundenen Elektronen ($\sim Z^5$)
 Typ. Absorptionskoeffizienten (K, L...) - s. Atomphysik)

4.2 Compton-Effekt

= Photon-Streuung an quasifreien Elektronen:



Kinematik:

$$E_{\gamma}' = E_{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{E_{\gamma}}{m_e c^2} (1 - \cos \theta_{\gamma})}$$

→ Compton-Kante für $\theta_{\gamma} = 180^\circ$

$$E_{\gamma}'|_{\min} = \frac{E_{\gamma}}{1 + 2E}$$

$$E_{\text{kin}}^e|_{\max} = E - E_{\gamma}' = E_{\gamma} \frac{2E}{1 + 2E}$$

(Rückstoß des Elektrons)

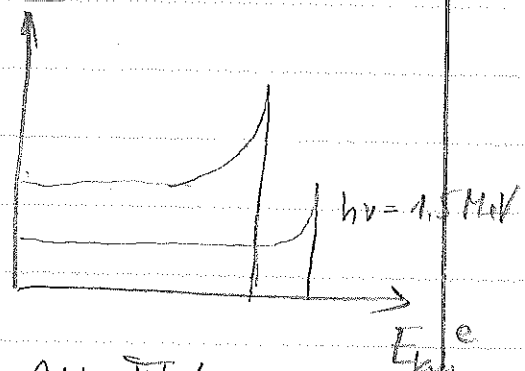


Abb. IV.6

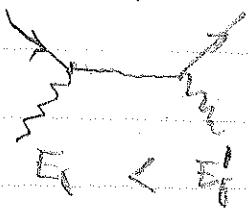
Exakter WQ für Compton-Streuung durch Klein-Nishina Formel (QED-Rechnung):

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega_{\gamma}} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + E(1 - \cos \theta_{\gamma})]^2} \left[1 + \cos \theta_{\gamma} + \frac{E^2 (1 - \cos \theta_{\gamma})^2}{1 + E(1 - \cos \theta_{\gamma})} \right]$$

Grundsätze: $E \ll 1$ $\sigma_c \approx \sigma_{\text{Thomson}} (1 - 2E) \rightarrow \sigma_{\text{Th}}$ für $E_{\gamma} \rightarrow 0$

$$E \gg 1 \quad \sigma \propto \frac{\ln E}{E} \quad \sigma_{\text{Th}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.676$$

Inverser Compton Effekt: Photon trifft auf hochenergetisches Elektron



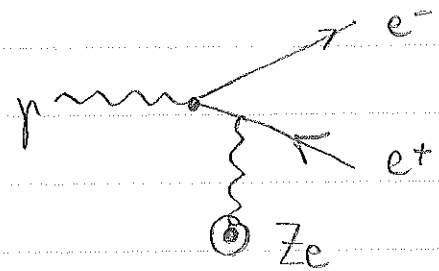
↳ für die Elektron-Energie wird auf Photon übertragen: $E_{\gamma}' \gg E_{\gamma}$

4.3 Paarbildung am einem Stoßpartner $\gamma \rightarrow e^+e^-$

Konversion eines Photons in ein e^+e^- -Paar ohne Stoßpartner nicht möglich (4er Impulserhaltung)

Kinematische Schwelle:

$$\begin{aligned} E_\gamma &> 2m_e c^2 + \frac{2m_e c^2}{M} \quad (\text{Streuung am Kern}) \\ &> 1.02 \text{ MeV} \quad \leftarrow \text{Rückstoßenergie des Kerns} \\ &> 4m_e c^2 \quad (\text{Streuung am Elektron}) \\ &\geq 2.04 \text{ MeV} \end{aligned}$$



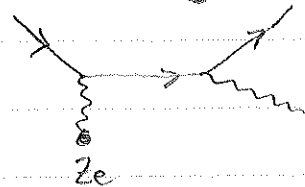
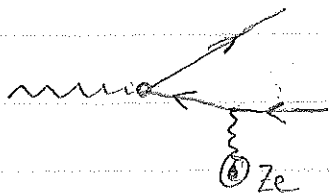
WL wächst für Energie $E_\gamma \gg 2m_e c^2$ bis zu einem Sättigungswert an:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pair}} &= \frac{7}{9} \left(4\pi \alpha r_e^2 Z^2 \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) \right) \\ &= \frac{7}{9} \cdot \frac{A}{M_A} \cdot \frac{1}{X_0} \quad \text{s. Abschnitt 2: Strahlungslänge } X_0 \end{aligned}$$

d.h. die mittlere freie Weglänge eines Photons für Paarproduktion ist:

$$\lambda_{\text{pair}} = \frac{1}{n \sigma} = \frac{9}{7} X_0 \approx X_0 \quad (\text{Strahlungslänge})$$

Bem.: Feynman-Graphen für Paar-Blockung und Bremsstrahl ähnlich:



Energie- bzw. Intensitätsverlust (Photonen) wird in beiden Fällen durch die gleiche material spezifische Konstante X_0 beschrieben:

$$I(x) = I_0 e^{-x/X'_0}$$

$$X'_0 = \frac{9}{7} X_0$$

$$E(x) = E_0 e^{-x/X_0}$$

5. Elektromagnetische Schauer

Durch die Kombination von Bremsstr. und Paarsproduktion kommt es bei der Wechselwirkung von hochenergetischem Elektron und Photon mit Materie zur Ausbildung sogenannter elektromagnetischer Schauer:

Einfaches Schauermodell

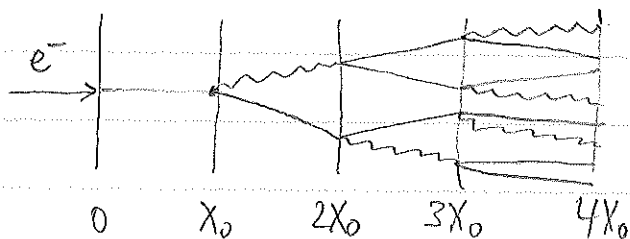


Abb IV. 7

Im Mittel kommt es nach etwa X_0 (= ein Strl. Länge) zur Aussendung von Bremsstr. oder zu Paarsbildung.

- In jedem Schritt $\frac{1}{2}$ verdoppelt sich die Zahl der Schauerkerne, die mittlere Energi halbiert sich dem entsprechend (E_n)
- Prozess bricht ab, wenn der Energieverlust durch Ionisation dominiert wird: $E_c \approx E_n$

Man kann sich leicht der Tiefe des Schauers überlegen.*)

$$X_{\max} = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2} \cdot X_0 \approx \ln(E_0)$$

Detektoren (Kalorimeter) zur Messung der Gesamtenergie von Elektronen + Photonen (E.M. CAL) müssen deshalb $\sim \ln E$ tief sein.

Schauerkerndichte $N(t) = 2^t$ mit $t = X/X_0$

Energie $E(t) = E_0/2^t$

Abbruch des Schauers: $E(t) \approx E_c$

Max. Schauertiefe: $t_{\max} = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2}$