Programm 6.10.2015

- Differentialrechnung
  - Problemstellung
  - Differenzenquotient, berechnen von Ableitungen
  - Differentiationregeln
  - Mittelwertsatz
  - Extremwertberechnung
  - Differential
  - Fehlerrechnung

- WWW Seite mit Folien und Aufgaben

  http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/

Einführung - Differentialrechnung

Begründer der Infinitesimalrechnung

Sir Isaac Newton

4.1.1643 – 31.3.1727

Gottfried Wilhelm Leibniz

1.7.1646 – 14.11.1716

Problemstellung und Motivation

Betrachte eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Wie ändert sich der Weg als Funktion der Zeit?

http://www.walter-fendt.de/ph14d/beschleunigung.htm

$$s(t) = v \cdot t + t_0$$

v ist die Steigung der linearen Funktion

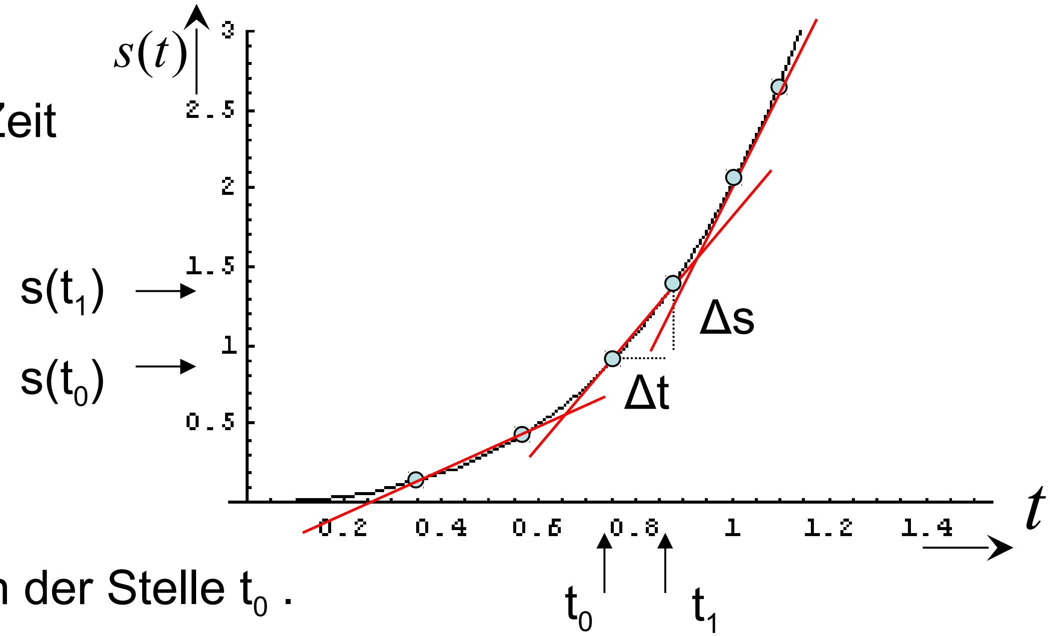
$$Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}$$

Wie sieht v(t) für beliebige s(t) aus?

Differenzenquotient

Beschleunigte Bewegung

Messe den Weg als Funktion der Zeit in unserem “Spielexperiment”. Die Geschwindigkeit ist hierbei nicht konstant.



$$v(t_0) = \frac{Weg}{Zeit} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \tan(\alpha)$$

$$v = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$v(t_0)$ heißt die Ableitung von $s(t)$ an der Stelle t_0 .

Um die Geschwingkeit $v(t)$ für beliebige t zu bestimmen, müssen wir den obigen Grenzwert für alle t ermitteln.

Sekanten undTangentensteigung

Anschauliche Illustration der Problematik der Sekanten und Tangenten Steigung:
http://www.walter-fendt.de/m14d/sektang.htm

Beispiel einer Ableitung bei einer quadratischen t Abhängigkeit einer Weg-Zeit Funktion.

Übungsaufgaben Differentialrechnung I:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151006_I.pdf

Werkzeuge

Funktionen und Ableitungen - Hilfsmittel

Java tool um Funktionen und die Ableitungen zu zeichnen.

http://www.walter-fendt.de/m14d/ableitungen.htm

Differenzieren mit Wolfram Alpha

http://www.wolframalpha.com

z.B. „differentiate (sin x + e^(-x)) / (cos x + sin x)“

Differenzieren und zeichnen mit Mathematica – Beispiel Notebook

- Notebook herunterladen und speichern

  http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/BeispielDifferenzieren.nb
- Mathematica aufrufen, notebook öffnen und mit „shift“ „enter“ ausführen

Differentiationsregeln

- **Verallgemeinerte Potenzregel**

  Für jede rationale Zahl q gilt, die Funktion f : $f(x) = x^q$ hat die Ableitung $f'(x) = q \cdot x^{(q-1)}$.

- **Summenregel**

  Seien f und g reelle Funktionen, die an einer Stelle a differenzierbar sind, dann ist auch f+g an der Stelle a differenzierbar.

  $$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

  Eine Summe darf gliedweise differenziert werden. Konstante Terme entfallen beim Differenzieren.

- **Produktregel**

  Seien f und g reelle Funktionen, die an einer Stelle a differenzierbar sind, dann ist auch f·g an der Stelle a differenzierbar.

  $$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

  Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Übungsaufgaben Differentialrechnung II:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151006_II.pdf

Differentiationsregeln

Quotientenregel

Seien f und g reelle Funktionen, die an einer Stelle a differenzierbar sind, dann ist auch f/g an der Stelle a differenzierbar.

$$(f/g)'(a) = (f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)) / g^2(a)$$

Kettenregel

Seien f und g reelle Funktionen, die sich verketten lassen. Wenn f und g an einer Stelle a und g(f(a)) differenzierbar sind, dann ist die Verkettung ebenfalls differenzierbar.

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Reziprokenregel

Sei f eine reelle Funktion, die an einer Stelle a differenzierbar ist, dann ist auch 1/f an der Stelle a differenzierbar.

$$(1/f)'(a) = -f'(a) / f^2(a)$$

Übungsaufgaben Differentialrechnung III:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151006_III.pdf

Formelsammlung

Liste mit wichtigen Ableitungen

f	f ‘
c	0
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Differentiationsregeln in Kurzform

Summenregel: $(f+g)' = f' + g'$

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Kettenregel: $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f''$

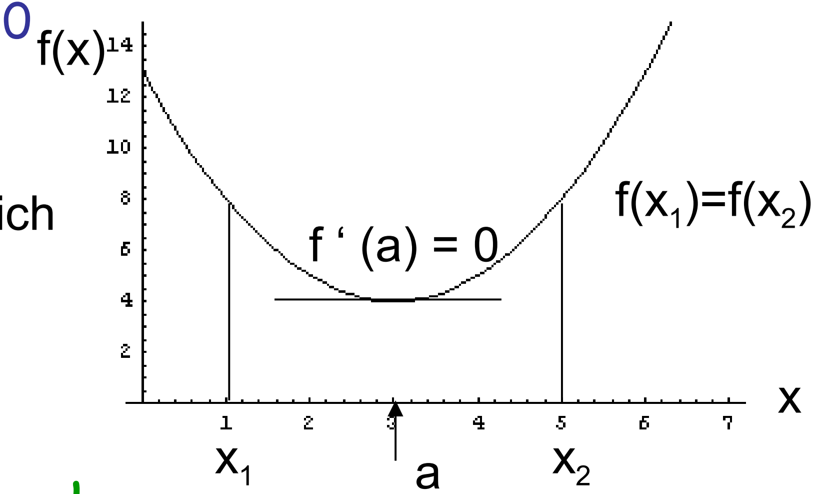
Quotientenregel: $(f / g)' = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2$

Mittelwertsatz

Satz von Rolle

Sei A eine zusammenhängende Menge, f: A→B eine differenzierbare Funktion x_1, x_2 ϵ A und $x_1 < x_2$. Wenn $f(x_1) = f(x_2)$ dann gibt es mindestens eine Stelle a ϵ $]x_1,x_2[$ für die gilt: $f'(a) = 0$

Anschaulich:
Wenn die Funktionswerte an zwei Punkten gleich sind, gibt es ein Minimum.

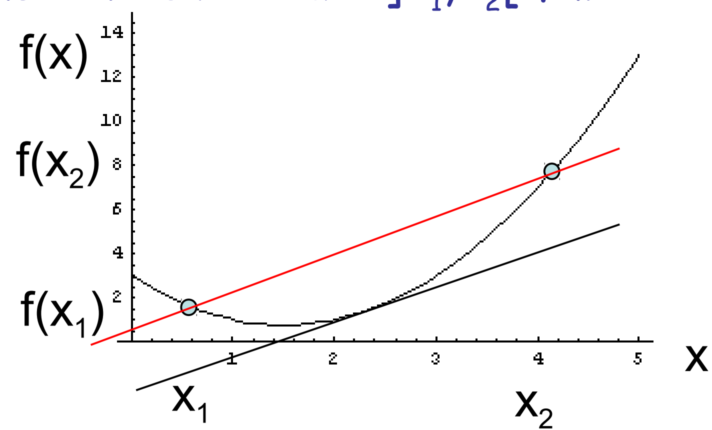


Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei A eine zusammenhängende Menge, f: A→B eine differenzierbare Funktion x_1, x_2 ϵ A und $x_1 < x_2$. Es gibt mindestens eine Stelle a ϵ $]x_1,x_2[$ für die gilt:

$$f'(a) = (f(x_2) - f(x_1)) / x_2 - x_1$$

Anschaulich:
$(f(x_2) – f(x_1)) / x_2 – x_1$ ist die mittlere Steigung von f im Intervall $]x_1,x_2[$. Es gibt mindestens einen Punkt a im Intervall indem die Ableitung gleich der mittleren Steigung ist.



Monotoniesatz

Sei A eine zusammenhängende Menge, f: $A \rightarrow B$ eine differenzierbare Funktion.

$f'(x) > 0$ für alle $x \in A$, dann ist f monoton wachsend.

$f'(x) < 0$ für alle $x \in A$, dann ist f monoton fallend.

$f'(x) = 0$ für alle $x \in A$, dann ist f konstant.

Übungsaufgaben Differentialrechnung IV:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151006_IV.pdf

Eigenschaften von Funktionen (1)

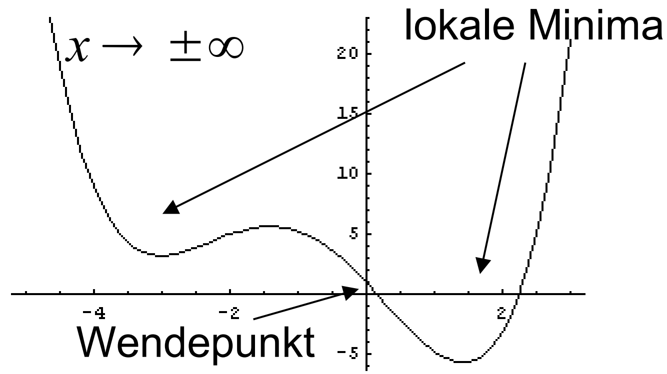
Einführung

Welche Aussagen können wir über diese Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 - 6x + 1$ machen?

→ Bestimmung der Eigenschaften von f(x)

Heute: verwende Hilfsmittel

- Java Werkzeug zum Darstellen von Funktionen
  http://www.walter-fendt.de/m14d/ableitungen.htm
- Mathematica



Eigenschaften von Funktionen lassen sich mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen.

Extremwerte

Satz: Existenz lokaler Extremwerte

$f: A \to B$ sei in einer Umgebung V von $a \in A$ differenzierbar und an der Stelle a zweimal differenzierbar.
Wenn f'(a) = 0 und außerdem f''(a) < 0 dann hat f an der Stelle a lokales Maximum, wenn f'(a) = 0 und ausserdem f''(a) > 0 , dann hat f an der Stelle a lokales Minimum.

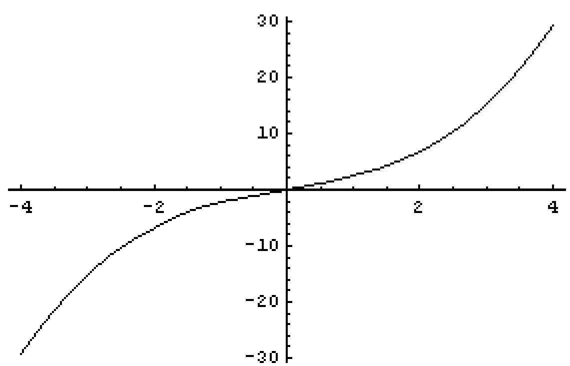
Eigenschaften von Funktionen (2)

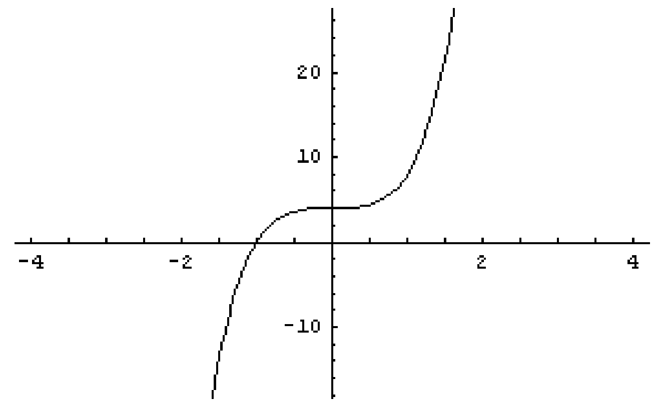
Wendepunkte

Satz: Wendepunkte
$f: A \to B$ sei in einer Umgebung von $a \in A$ 2 mal und an der Stelle a 3 mal differenzierbar . Wenn f''(a) = 0 ^ f'''(a) $\neq$ 0, dann hat f an der Stelle a einen Wendepunkt.

Sattelpunkt

Satz: Sattelpunkte
$f: A \to B$ sei in einer Umgebung von $a \in A$ 2 mal und an der Stelle a 3 mal differenzierbar . Wenn f'(a) = 0 ^ f''(a) = 0 ^ f'''(a) $\neq$ 0, dann hat f an der Stelle a einen Sattelpunkt.





Der Sattelpunkt hat eine “waagerechte” Tangente

Übungsaufgaben Differentialrechnung V:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151006_V.pdf

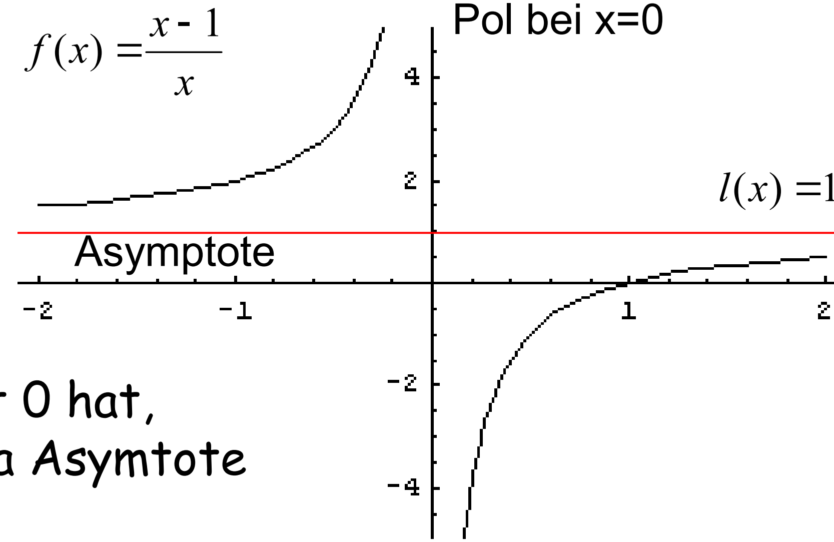
Eigenschaften von Funktionen (3)

Asymptotisches Verhalten

Wenn es eine lineare Funktion l gibt, so daß

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-l(x)\right)=0$ bzw. $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-l(x)\right)=0$

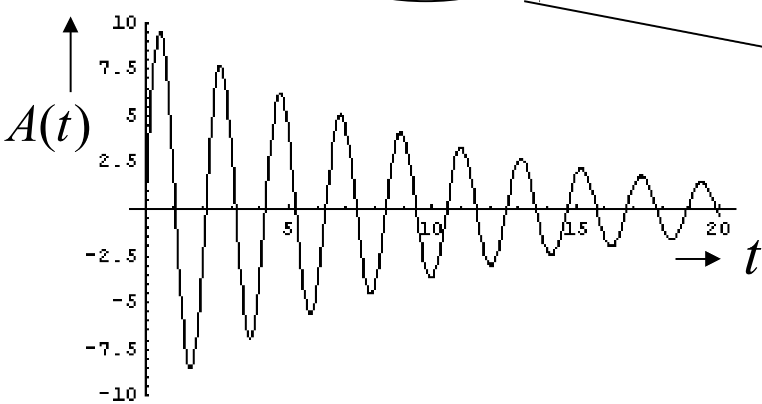
ist l(x) Asymtotenfunktion von f(x) in $\pm\infty$.

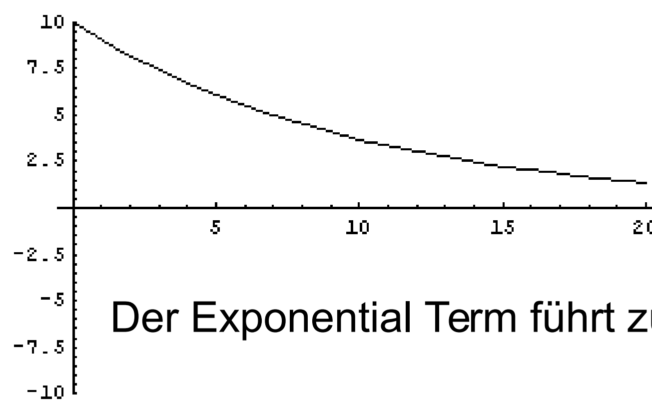


Wenn $f(x)^{-1}$ an einer Stelle a den Grenzwert 0 hat, dann heißt die Gerade mit der Gleichung x=a Asymtote des Graphen von f(x) in a, a heißt Pol von f.

Physikalisches Beispiel: Gedämpfte Schwingung

$$A(t)=A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega \cdot t+\phi_0)$$





Der Exponential Term führt zu $\lim_{t\to\infty} A(t)=0$

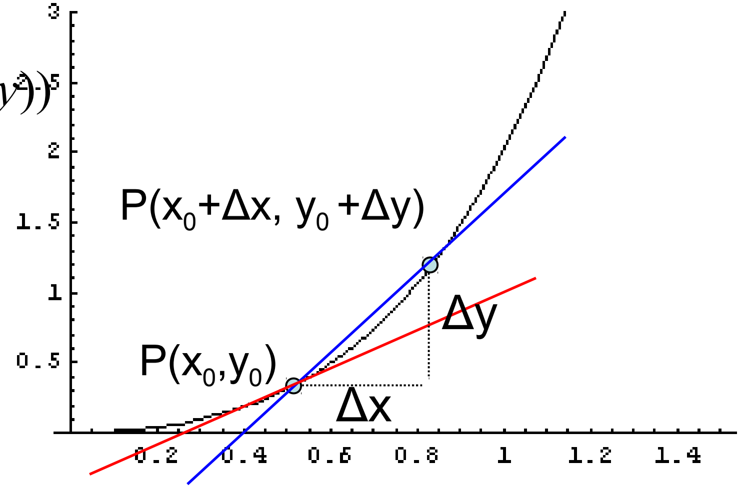
Differential

Anschauliche Bedeutung

Änderung auf der Kurve (Δx,Δy):

$x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x$ hat zur Folge $y_0 \rightarrow y_0 + \Delta y$

$P(x_0, y_0) \rightarrow P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$



Änderung auf der in P_0 angelegten Tangente (dx,dy):

$x_0 \rightarrow x_0 + dx$ hat zur Folge $y_0 \rightarrow y_0 + dy$

α ist Winkel zwischen Tangente und der x Achse

$$\tan(\alpha) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

Definition:

Unter dem Differential dy der Funktion y = f(x) zur Änderung Δx versteht man die Änderung entlang der Tangente $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$

Falls Δx klein ist Δx ≈ dx dann ist $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, d.h. die Funktion y=f(x) darf in guter Näherung in der Umgebung von x_0 durch die Kurvensteigung ersetzt werden.

→ wird häufig in der Physik verwendet!

Notation

Häufig verwendet Schreibweisen für das Differenzieren

$y = f(x)$ Funktion der Variablen x

1. Ableitung: $f'(x)$ $\quad \frac{df(x)}{dx}$ $\quad y'$ $\quad \frac{dy}{dx}$

In der Physik treten oft Funktionen auf, die von der Zeit abhängen. Für die Ableitung dieser Funktionen wird ein Punkt verwendet.

$s(t)$ Weg Zeit Funktion

1. Ableitung: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$ Geschwindigkeit

2. Ableitung: $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \ddot{s}(t)$ Beschleunigung

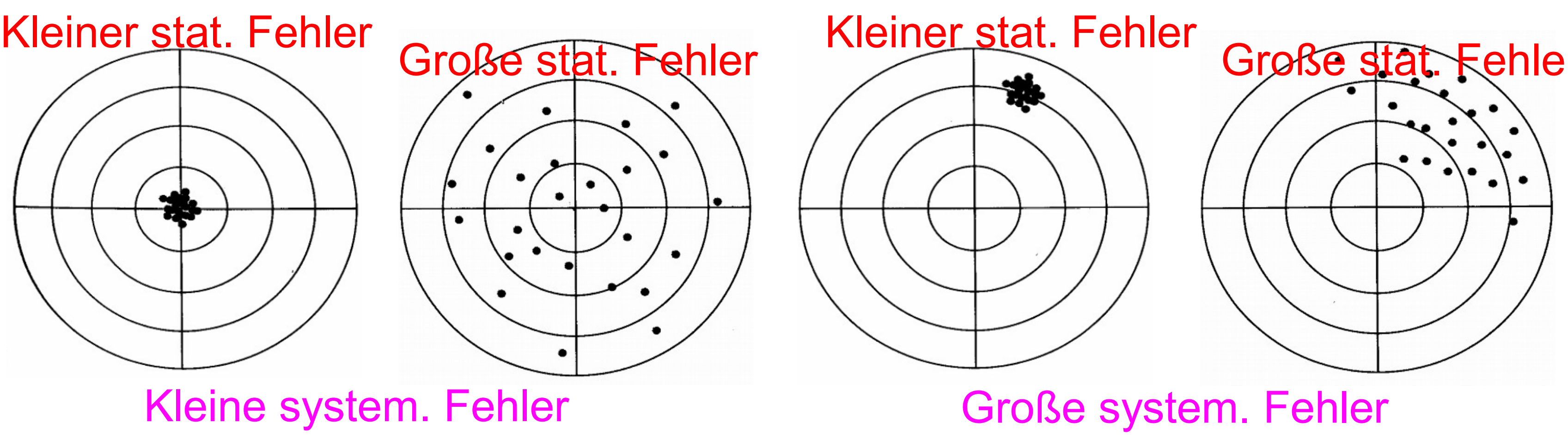
Fehlerrechnung

Messfehler

Eine Messung erfolgt immer nur mit endlicher Genauigkeit.
Unterscheidung von 2 Beiträgen:

- Systematische Fehler:
  Konstante Abweichung vom wahren Wert unter gleichen Bedingungen
- Zufällige oder statistische Fehler:
  Zufällige Abweichungen vom wahren Wert in positiver oder negativer Richtung

Beispiel: Messergebnisse einer Sternposition

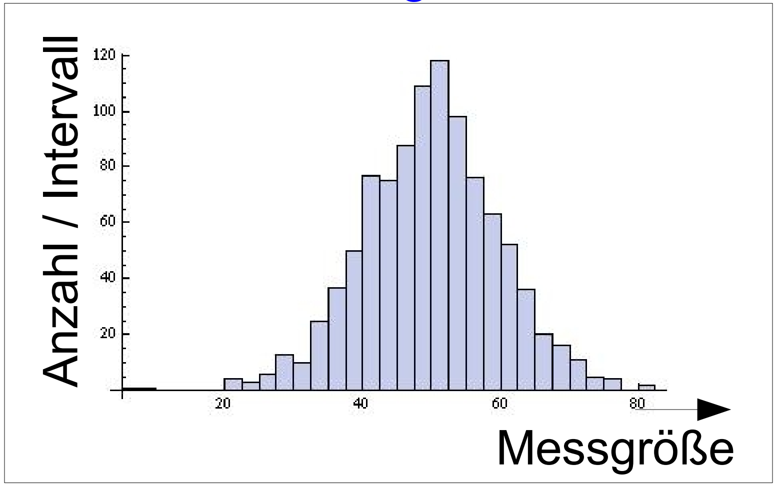


Fehlerrechnung

Quantitative Bestimmung

- Systematische Fehler:
  Schwierig! Genaue Analyse des Messaufbaues
- Zufällige oder statistische Fehler:
  Mehrfache Messung der selben Größe

Histogramm



- Schätzung des Messwertes bei mehrfacher Messung:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ Arithmetrisches Mittel

- Fehler einer Einzelmessung

Eigenschaft des Arithmetischen Mittels $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = min$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$ Standardabweichung

- Mittlerer Fehler des Mittelwertes
  Mittelwert von n Messungen ist um $\frac{1}{\sqrt{n}}$ genauer als die Einzelmessung

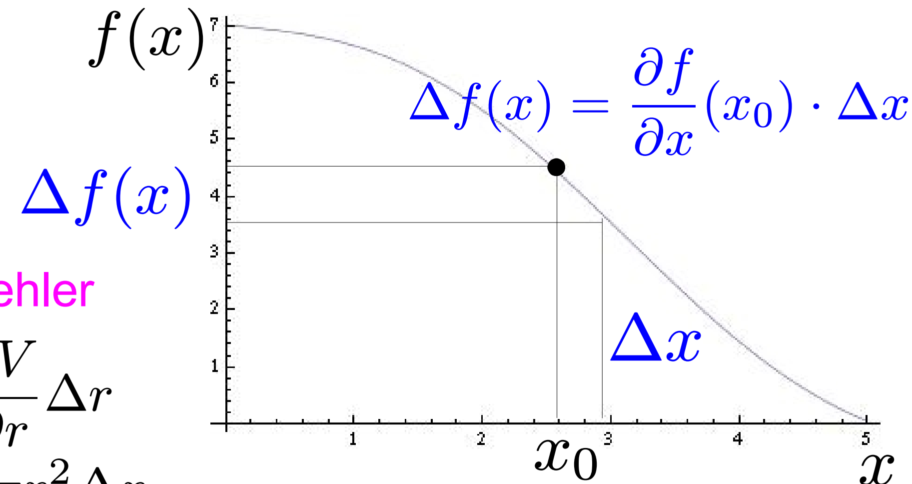
$$\sigma_M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Fehlerfortpflanzung

- **Fehler zusammengesetzter Größen**

  Wie wirkt sich ein gemessener Fehler auf eine zusammengesetzte Größe aus?

  $$\boxed{\Delta f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\Delta x}$$



  Beispiel: Fehler von V bei gegebenem Fehler von r

  $$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r$$

  $$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$$

- **Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz**

  Wie wirken sich mehrere gemessene Fehler auf eine zusammengesetzte Größe aus?

  $$\kappa = f(x, y) \qquad \Delta\kappa = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y)^2}$$