Winter Semester 2015

5.10 - 9.10.2015
8:15 - 13:00
INF 230 gHS

Mathematischer Vorkurs Physik A

Jörg Marks, Physikalisches Institut, INF 226
marks@physi.uni-heidelberg.de

Mi 7.10. entfällt
Kein Raum

Inhalt

- Zahlen und Zeichen
- Gleichungen, Physikalische Einheiten — 5.10.15
- Funktionen
- Differentialrechnung — 6.10.15
- Integralrechnung — 8.10.15
- Vektoren — 9.10.15
- Weitere Infos im Laufe der Veranstaltung unter
  http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/
- Homepage der Physik A Vorlesung
  http://www.kip.uni-heidelberg.de/vorlesungen/PhysikAB

Ziel der Veranstaltung

Ziel

- Wiederholen der Konzepte der Kursstufenmathematik im Hinblick auf die Rechenfertigkeiten, die zu Beginn der Physikvorlesung benötigt werden.
- Keine Beweise!
- Konzepte so erläutern, dass Sie mit den Erklärungen selbständig kleine Aufgaben lösen können.

Ein wichtiger Teil der Physik Vorlesung ist das selbstständige Üben des gelernten Stoffes. Das geht aber nur mit einigen rechnerischen Grundfertigkeiten. Diese wollen wir wiederbeleben.

Niveau

- Wir werden auf dem Level unterhalb des Mathe-Kursstufen-Unterrichts einsteigen. Gute Mathe Schüler werden erst bei den Vektoren etwas Neues lernen!

Struktur des Kurses

- 15 min. Vorlesung
- 10 min. Lösen von Übungsaufgaben (gemeinsam mit Ihrem Nachbarn!)
- 5 min. Besprechung der Lösungen

Programm 5.10.2015

- Zahlen und Zeichen
  - Zahlenmenge und Zeichen definieren
- Gleichungen
  - Begriffe, Brüche, Kürzen, Ausklammern, Binomische Formeln
  - Rechnen mit Potenzen
  - Quadratische Gleichungen
- Physikalische Grössen und Einheiten
  - Umrechnen und Exponenten
- Funktionen
  - Definition, Beispiele häufig verwendeter Funktionen, Eigenschaften
  - Polynome, Potenzfunktionen, Exponentialfunktion, Graphische Darstellung

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/

Zahlen, Zeichen und Einheiten

Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

$$Q \text{ und irrationale Zahlen} \Rightarrow \quad R \text{ (reelle Zahlen)}$$

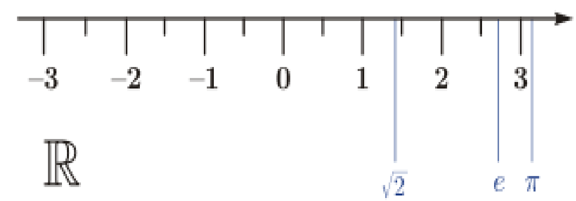
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Uneingeschränkt ausführbare Rechenoperationen

+ ·

+ - ·

+ - · :



Anordnung der rellen Zahlen

$$a, b \in \mathbb{R} \qquad a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \ \vee \ a = b$$

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \ \vee \ a = b$$

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b$$

$$|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$$

$$\begin{array}{lcll} \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} & = & [a, b] & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} & = & [a, b) & \text{rechtsoffenes Intervall} \\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} & = & (a, b] & \text{linksoffenes Intervall} \\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} & = & (a, b) & \text{offenes Intervall} \\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\} & = & [a, \infty) & \\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} & = & (a, \infty) & \\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\} & = & (-\infty, b] & \\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} & = & (-\infty, b) & \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{rechtsoffenes Intervall}\\ \text{linksoffenes Intervall}\end{array}\right\}$ halboffene Intervalle

Physikalisch kontinuierliche Vorgänge finden in der Regel in R statt.

Mathematische Zeichen

Summenzeichen: $\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_N \; , N \in N$

Summen endlicher Folgen: $\sum_{i=1}^{N} 2 \cdot i - 1 = 1 + 3 + 5 + ... + 2 \cdot N - 1 = N^2$ ungerade Zahlen

$\sum_{i=1}^{N} 2 \cdot i = 2 + 4 + 6 + ... + 2 \cdot N = \frac{1}{2} \cdot N \cdot (N+1)$ gerade Zahlen

Produktzeichen: $\prod_{i=1}^{N} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_N$

Fakultät: $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot .... \cdot N = \prod_{i=1}^{N} i$

Potenzen : $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a = \prod_{i=1}^{n} a \; , n \in Z$ $a^0 = 1 \; , \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

a := Basis n = Exponent

Wurzeln: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \; , \; a \in R^+$

a^n := Radikant m = Wurzelexponent

Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \; , \quad n \geq k \; , \; n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}$$

Mathematische Zeichen

Algebra	
$\in$	ist Element von
$\notin$	ist nicht Element von
$\cap$	Schnittmenge
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\subset$	ist echte Teilmenge von
$\not\subset$	ist nicht echteTeilmenge von
$\subseteq$	ist echte oder unechte Teilmenge von
$\varnothing$	leere Menge
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen
$\mathbb{B}$	Bruchzahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$=$	ist gleich
$\approx$	ist ungefähr gleich
$\equiv$	ist identisch
$\neq$	ist ungleich
$<$	ist kleiner als
$>$	ist größer als
$\leq$	ist kleiner oder gleich
$\geq$	ist größer oder gleich
alb	a ist Teiler von b
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\Leftrightarrow$	ist äquivalent zu
$\neg$	logisches "nicht"
$\wedge$	logisches "und"
$\vee$	logisches "oder"
%	Prozent
‰	Promille
∞	unendlich

Geometrie	
A,B,C...	Punkte
a,b,c...	Seiten
$\alpha,\beta,\gamma\ldots$	Winkel
$\angle$(BAC)	Winkel bei A
°	Grad
'	Minuten
"	Sekunden
$\overline{AB}$	Strecke von A nach B
$\overline{AB}$	Strahl durch B mit dem Anfangspunkt A
$\overrightarrow{AB}$	Vektor von A nach B
$\perp$	ist senkrecht zu
$\parallel$	ist parallel zu
$\cong$	ist kongruent zu
r	Umkreisradius
ρ	Inkreisradius
π	3,141592...(Kreiszahl)

Griechische Buchstaben	
α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
δ	Delta
ε	Epsilon
η	Eta
λ	Lambda
μ	My
ν	Ny
π	Pi
ρ	Rho
φ	Phi

Gleichungen

Begriffe

- Term: mathematischer Ausdruck aus Variablen, Konstanten und Rechenvorschriften (+, - etc.) in mathematisch zulässiger Anordnung.
- Gleichung: zwei Terme S und T, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind (S = T).
- Ungleichung: zwei Terme S und T, die durch eines der Relationszeichen >, < ,>=, <= oder das Ungleichheitszeichen $\neq$ verbunden sind.

Lösung von Gleichungen

Rezept: Führe auf beiden Seiten der Gleichung die selben Operationen durch, bis die gesuchte Grösse auf einer Seite isoliert steht.

Terme berechnen, Hauptnenner suchen, kürzen, ausklammern, binomische Formeln anwenden, ….

Beispiel:

$$\frac{1}{x} = a \qquad \Big| \cdot x$$

$$\frac{1}{x} \cdot x = a \cdot x \qquad \Big| : a$$

$$x = \frac{1}{a}$$

Binomische Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

allgemein: $$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Rechnen mit Potenzen

Potenzen gleicher Basis: $n, m \in Z$

- Produkt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \prod_{i=1}^{m} a \cdot \prod_{i=1}^{n} a = \prod_{i=1}^{m+n} a = a^{m+n}$
- Quotient $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- Potenzieren $(a^m)^n = a^{m\,n}$

Potenzen mit gleichen Exponenten:

- Produkt $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- Quotient $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

Die obigen Rechenregel gelten auch für Potenzen mit $n \in Q$

Beispiel: $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{m \cdot n}}$ m-te Wurzel aus der n-ten Wurzel von a

Lösungen von quadratischen Gleichungen

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad , p, q \in R$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{4} - q}_{=D}} - \frac{p}{2}$$

D = 0 : 1 Lösung
D > 0 : 2 Lösungen
D < 0 : keine Lösung in R

Physikalische Größen

Physikalische Gesetze

Die physikalischen Gesetze beschreiben die Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen, die durch mathematische Objekte (Zahlen, Vektoren, Funktionen) und Gleichungen zueinander in Beziehung stehen. Das Ziel ist die experimentelle Erfassung und Beschreibung der Naturvorgänge aufgrund der ihnen zugrunde liegenden Gesetze.

Messungen

Messungen vergleichen eine physikalische Größe mit einer definierten Einheit oder einer Menge zusammengesetzter Einheiten.

Das Resultat einer Messung besteht also aus

Messwert , Einheit und Messfehler

Internationales Einheitensystem (SI)

Nach internationaler Vereinbarung hat man in der Physik **sieben Basisgrößen (Grundgrößen)** mit den zugehörigen Basiseinheiten eingeführt (1954 auf der 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (CGPM) in Paris).

Basisgröße	Basiseinheit	Einheiten-zeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Die 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (CGPM) hat 1960 zwei **ergänzende SI-Einheiten** festgelegt:

Größe	Einheit	Einheiten-zeichen
Ebener Winkel	Radiant	rad
Räumlicher Winkel	Steradiant	sr

Abgeleitete physikalische Einheiten mit besonderen Einheitennamen

Einheitenname	Zeichen	Größe	Beziehung
Becquerel	Bq	Aktivität	$1\ Bq = 1\ s^{-1}$
Coulomb	C	elektr. Ladung	$1\ C = 1\ A \cdot s$
Dioptrie*	dpt	Brechkraft	$1\ dpt = 1\ m^{-1}$
Farad	F	elektr. Kapazität	$1\ F = 1\ C \cdot V^{-1} = 1\ A^2 \cdot s^4 \cdot m^{-2} \cdot kg^{-1}$
Grad Celsius	°C	Celsius-Temperatur	1 °C = 1 K ***
Gray	Gy	Energiedosis	$1\ Gy = 1\ J \cdot kg^{-1} = 1\ m^2 \cdot s^{-2}$
Henry	H	Induktivität	$1\ H = 1\ Wb \cdot A^{-1} = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Hertz	Hz	Frequenz	$1\ Hz = 1\ s^{-1}$
Joule	J	Energie, Arbeit, Wärmemenge	$1\ J = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Katal	kat	katalytische Aktivität	$1\ kat = 1\ mol \cdot s^{-1}$
Lumen	lm	Lichtstrom	$1\ lm = 1\ cd \cdot sr$
Lux	lx	Beleuchtungsstärke	$1\ lx = 1\ lm \cdot m^{-2} = 1\ cd \cdot sr \cdot m^{-2}$
Newton	N	Kraft	$1\ N = 1\ kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Newtonmeter*	N·m	Drehmoment	$1\ N \cdot m = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Ohm	Ω	elektr. Widerstand	$1\ \Omega = 1\ V \cdot A^{-1} = 1\ kg \cdot m^2 \cdot A^{-2} \cdot s^{-3}$
Pascal	Pa	Druck	$1\ Pa = 1\ N \cdot m^{-2} = 1\ kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Radiant**	rad	ebener Winkel	$1\ rad = 1\ m \cdot m^{-1}$
Siemens	S	elektr. Leitwert	$1\ S = 1\ A \cdot V^{-1} = 1\ A^2 \cdot s^3 \cdot m^{-2} \cdot kg^{-1}$
Sievert	Sv	Äquivalentdosis	$1\ Sv = 1\ J \cdot kg^{-1} = 1\ m^2 \cdot s^{-2}$
Steradiant**	sr	Raumwinkel	$1\ sr = 1\ m^2 \cdot m^{-2}$
Tesla	T	magnet. Flussdichte	$1\ T = 1\ Wb \cdot m^{-2} = 1\ kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$
Var*	var	elektr. Blindleistung	$1\ var = 1\ W = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Volt	V	elektr. Spannung, elektr. Potential	$1\ V = 1\ J \cdot C^{-1} = 1\ kg \cdot m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-3}$
Voltampere*	VA	elektr. Scheinleistung	$1\ VA = 1\ W = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Watt	W	Leistung, Energiestrom	$1\ W = 1\ J \cdot s^{-1} = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Weber	Wb	magnet. Fluss	$1\ Wb = 1\ V \cdot s = 1\ kg \cdot m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$

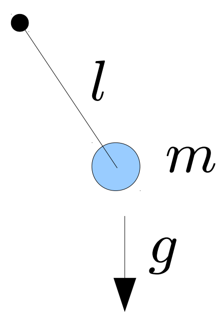
Exponenten Schreibweise

Kürzel	Name	Ursprung	Wert		
Y	Yotta	ital. *otto* = acht	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000	Quadrillion
Z	Zetta	ital. *sette* = sieben	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000	Trilliarde
E	Exa	gr. *εξάκις, hexákis* = sechsmal	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	Trillion
P	Peta	gr. *πεντάκις, pentákis* = fünfmal	10^{15}	1 000 000 000 000 000	Billiarde
T	Tera	gr. *τέρας, téras* = Ungeheuer / tetrákis = viermal	10^{12}	1 000 000 000 000	Billion
G	Giga	gr. *γίγας, gígas* = Riese	10^{9}	1 000 000 000	Milliarde
M	Mega	gr. *μέγας, mégas* = groß	10^{6}	1 000 000	Million
ma*	Myria	gr. *μύριοι, mýrioi* = zehntausend	10^{4}	10 000	Zehntausend
k	Kilo	gr. *χίλιοι, chílioi* = tausend	10^{3}	1 000	Tausend
h	Hekto	gr. *εκατόν, hekatón* = hundert	10^{2}	100	Einhundert
da	Deka	gr. *δέκα, déka* = zehn	10^{1}	10	Zehn
–	**Einheit**		10^{0}	1	Eins
d	Dezi	lat. *decimus* = zehnter	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	Zenti	lat. *centesimus* = hundertster	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	Milli	lat. *millesimus* = tausendster	10^{-3}	0,001	Tausendstel
µ	Mikro	gr. *μικρός, mikrós* = klein	10^{-6}	0,000 001	Millionstel
n	Nano	gr. *νάνος, nános* = Zwerg	10^{-9}	0,000 000 001	Milliardstel
p	Pico	ital. *piccolo* = klein	10^{-12}	0,000 000 000 001	Billionstel
f	Femto	skand. *femten* = fünfzehn	10^{-15}	0,000 000 000 000 001	Billiardstel
a	Atto	skand. *atten* = achtzehn	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001	Trillionstel
z	Zepto	lat. *septem* = sieben	10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001	Trilliardstel
y	Yocto	lat. *octo* = acht	10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001	Quadrillionstel

Beispiel

Die Betrachtung von Einheiten gibt Hinweise, welche Abhängigkeiten eine physikalische Größe haben kann.

Fadenpendel:



Schwingungsdauer t ?

$$[t] = T \qquad [m] = M$$

$$[l] = L \qquad [g] = \frac{L}{T^2}$$

$$t \sim g^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot l^{\gamma}$$

$$T \sim L^{\alpha} \cdot T^{-2\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot L^{\gamma}$$

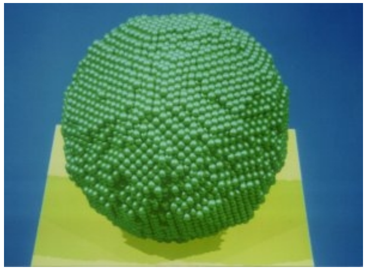
$$T \sim L^{\alpha+\gamma} \cdot T^{-2\alpha} \cdot M^{\beta}$$

Durch Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \alpha &= -\frac{1}{2} \\ \gamma &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow t \sim g^{-\frac{1}{2}} \cdot l^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

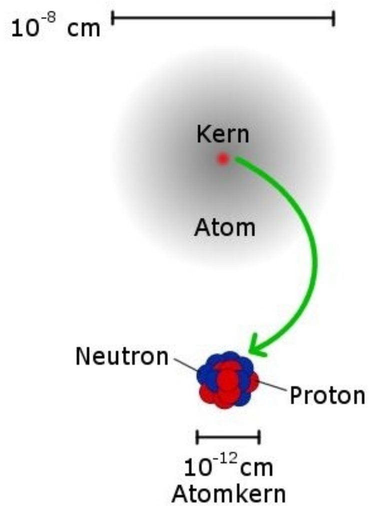
Die Konsistenz der Einheiten ist auf jeden Fall eine notwendige Bedingung für die Beschreibung eines physikalischen Vorganges.

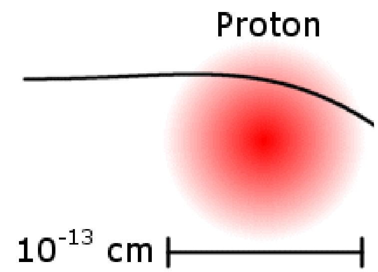
Kleinste Strukturen

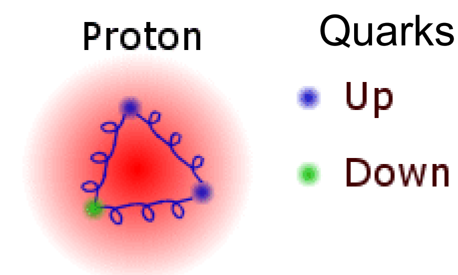


17000 Kupferatome

1/100.000 mm Durchmesser







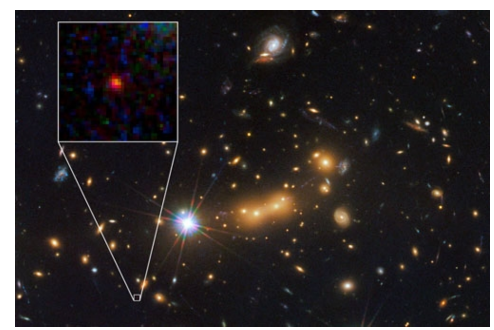
Spiralgalaxie NGC 1232

30 kpc

Radiogalaxien

100 kpc

Entferntestes Objekt



Entfernung von MACS0647-JD
420 Millionen Jahre nach Urknall

Große Distanzen

Übungsaufgaben I: Gleichungen und Einheiten

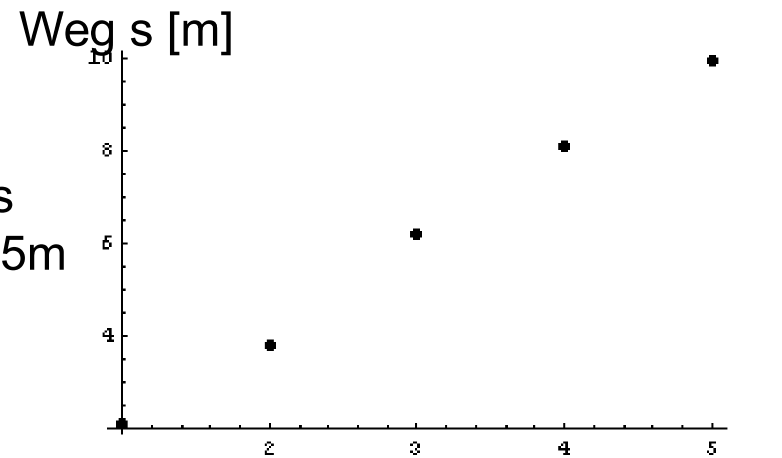
http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151005_I.pdf

Funktionen

Einführung

Experiment: Rollender Ball
Messe Weg und Zeit

Zeit t	1s	2s	3s	4s	5s
Weg s	2.02m	3.9m	6.05m	8.1m	9.95m



Bestimme aus der Messung
Zuordnungsvorschrift $s(t) = 2 \cdot t$

Die Zuordnung s=f(t) heißt Funktion.
Mathematische Schreibweise: f: R→R, t→2 · t oder f: y = 2 · x

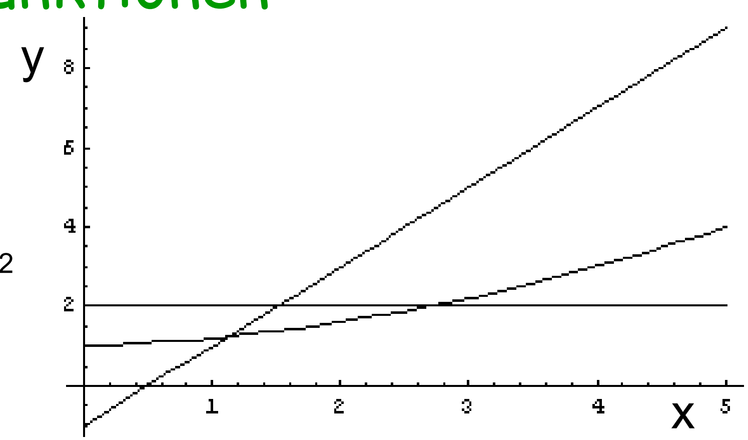
Zu jeder Funktion existiert ein Graph

Zuordnung und Graphische Darstellung

http://www.mathe-online.at/galerie/fun1/temperatur/index.html

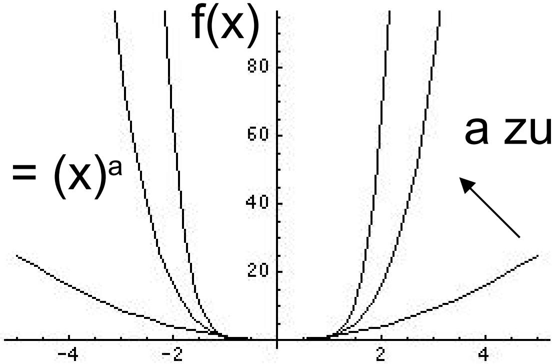
Beispiele häufig auftretender Funktionen

- Konstante Funktion y = constant
- Lineare Funktion y = m x + b
- Parabel $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$
- Polynom n-ten Grades $y = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x^i$



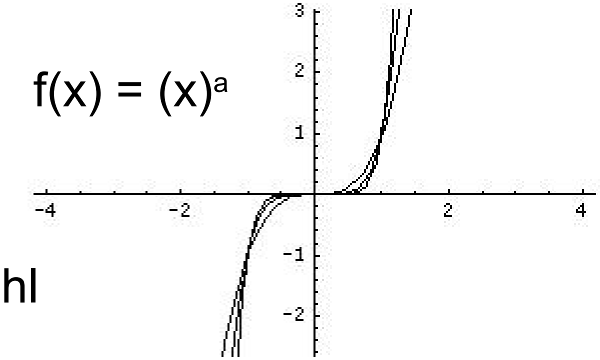
Verschiedene Potenzfunktionen

Potenzfunktionen



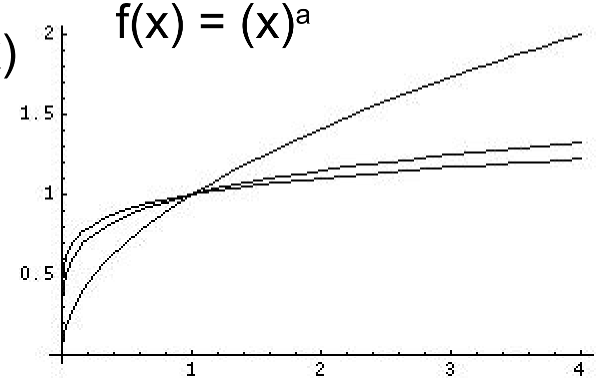
gerade

a natürliche Zahl



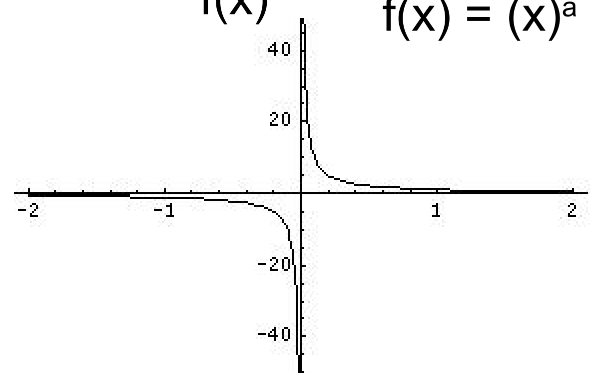
ungerade

Wurzeln



a rationale Zahl

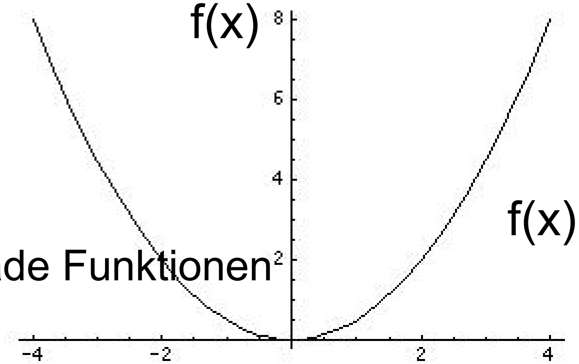
Hyperbeln



a < 0 ganze Zahl

Funktionen - Eigenschaften

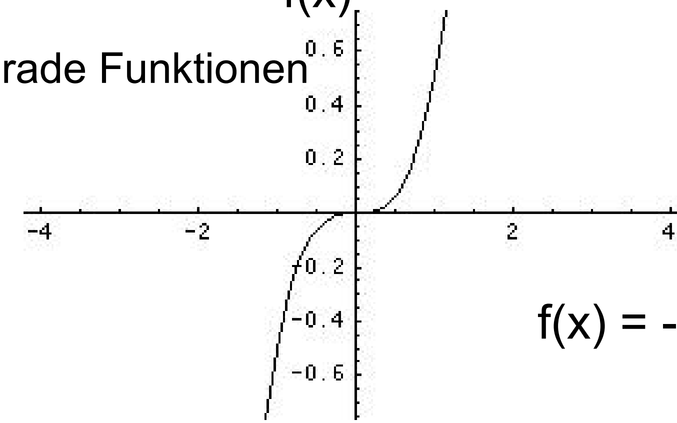
Achsensymmetrie



gerade Funktionen

$f(x) = f(-x)$

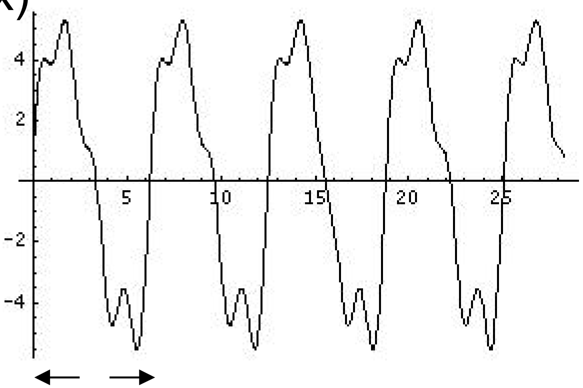
Punktsymmetrie



ungerade Funktionen

$f(x) = -f(-x)$

Periodische Funktionen

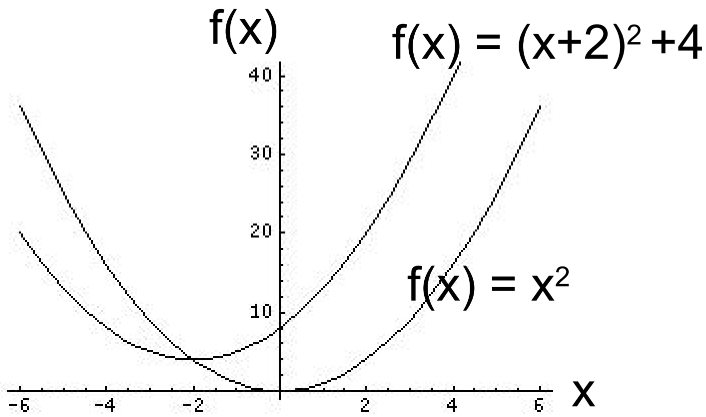


Gleiche f(x) wiederholen sich immer wieder:

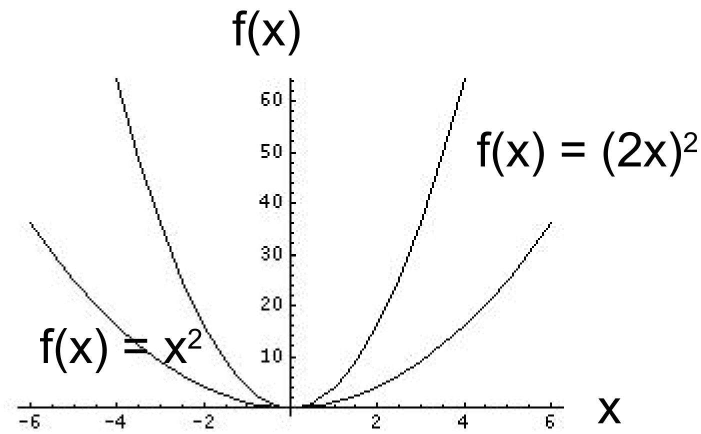
$f(x+p) = f(x) \quad \forall\, x$

Funktionen - Eigenschaften

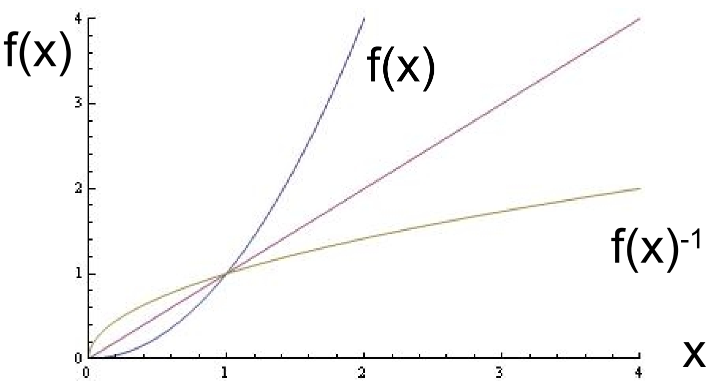
Verschiebungen



Skalierung



Umkehrfunktionen



Rezept:

Auflösen nach x: $x = f^{-1}(y)$

Vertauschen von x mit y: $y = f^{-1}(x)$

Graphisch: Umkehrfunktion durch spiegeln an $f(x)=x$

Übungsaufgaben II: Funktionen

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151005_II.pdf

Verknüpfung von Funktionen

- **Verkettung**

$$D_f, D_g \subseteq \mathbb{R} \ f : D_f \to \mathbb{R}, \ \ g : D_g \to \mathbb{R}$$

$$g(f) = g \circ f : D_{f \circ g} \to \mathbb{R}$$

$$x \to g(f(x))$$

- **Summe, Differenz und Produkt**

$$g \pm \cdot f : D_{f \pm \cdot g} \to \mathbb{R}$$

$$x \to g(x) \pm \cdot f(x)$$

- **Quotient**

$$\frac{g}{f} : D_{\frac{f}{g}} \to \mathbb{R}$$

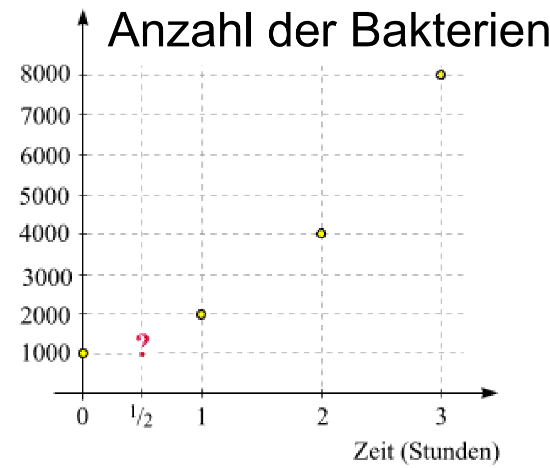
$$x \to \frac{g(x)}{f(x)}$$

Exponentialfunktion (1)

Exponentielles Wachstum

Das Wachstum einer Bakterienkultur ist durch Folgendes charakerisiert:

- In gleich langen Zeitintervallen vergrößert sich die Zahl der Bakterien um den gleichen Faktor
- Zu Beginn besteht die Kultur aus 1000 Bakterien.
- Während jeder Stunde verdoppelt sich die Zahl der Bakterien.

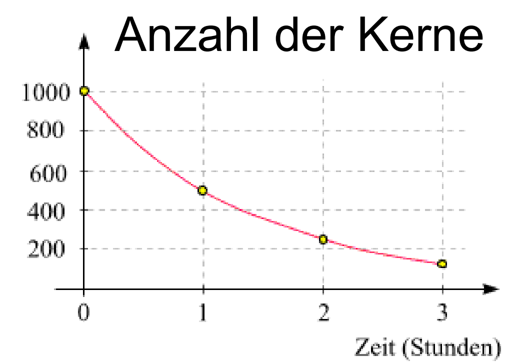


Anzahl N der Bakterien nach t Stunden $N(t) = 1000 \cdot 2^t$

$$N(24) = 1000 \cdot 2^{24} = 16777216000$$

Radioaktiver Zerfall

Anzahl der Kerne N nach t Stunden $N(t) = 1000 \cdot (\frac{1}{2})^t$



Exponentialfunktion

In gleich großen Intervallen ändert sich der Funktions-wert um den gleichen Faktor $f(x) = c \cdot a^{bx}$

$$f(x) = c \cdot a^{bx} = c \cdot (a^b)^x = c \cdot A^x$$

b > 0 : Wird x um den Wert 1/b erhöht, so ändert sich f um den Faktor a
b < 0 : Wird x um den Wert |1/b| erhöht, so ändert sich f um den Faktor 1/a

Exponentialfunktion (2)

Eulersche Zahl

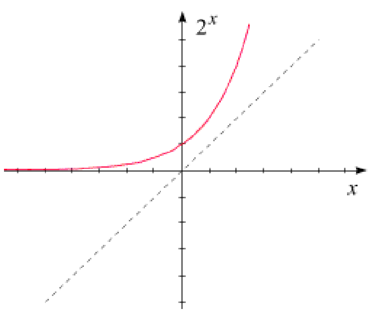
e ist die einzige Zahl für die gilt: $e^x > 1 + x \quad \forall\, x \in R$

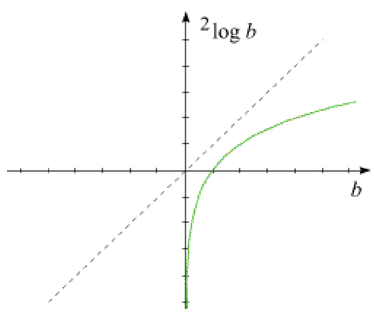
http://www.mathe-online.at/galerie/log/n_EulerscheZahl.html

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = 2.718281828459045235360287471352 66...$$

e wird häufig in der Physik als Basis verwendet, z.B. zur Beschreibung von Zerfallsprozessen: $f(t) = f(0) \cdot exp(-\lambda t) = f(0) \cdot e^{-\lambda t}$

Logarithmus – Umkehrfunktion der Exponentialfunktion





Logarithmus von b zur Basis a

$a^x = b \qquad x = {}^a log(b)$

Logarithmus zur Basis 10: Zehner-Logarithmus (lg)

Logarithmus zur Basis e: natürlicher Logarithmus (ln)

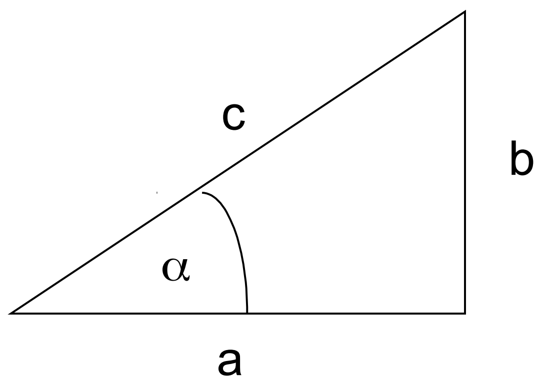
Basen sind nicht eindeutig: Jede Exponentialfunktion kann auf jede Basis bezogen werden

$$a^x = c^{x \cdot {}^c log(a)} \qquad {}^a log(b) = \frac{{}^c log(b)}{{}^c log(a)}$$

$$f(t) = f(0) \cdot 2^{-\frac{t}{s}} \rightarrow f(t) = f(0) \cdot e^{-\lambda t} \qquad \lambda = \frac{ln2}{s}$$

Trigonometrische Funktionen

Definition: Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck



a : Ankathete
b : Gegenkathete
c : Hypothenuse

SI Einheit α = Radian

$$\sin(\alpha) := \frac{b}{c} \qquad \cos(\alpha) := \frac{a}{c}$$

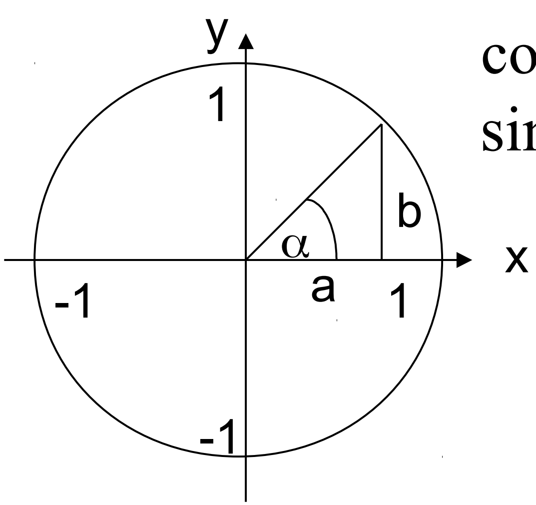
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Einheitskreis



$$\cos(\alpha) := a$$
$$\sin(\alpha) := b$$

Wertebereich: $0 < \alpha < 2\pi$

Führe periodische Funktionen ein

$$f : f(\alpha) = \sin(\alpha)$$
$$g : f(\alpha) = \cos(\alpha)$$

Illustration:

http://www.walter-fendt.de/m14d/sincostan.htm

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

Formeln für trigonometrische Funktionen

$$sin(x \pm y) = sin(x) \cdot cos(y) \pm cos(x) \cdot sin(y)$$
$$cos(x \pm y) = cos(x) \cdot cos(y) \mp sin(x) \cdot sin(y)$$

$$sin(2x) = 2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) \qquad sin(3x) = 3 \cdot sin(x) - 4 \cdot sin^3(x)$$
$$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) \qquad cos(3x) = 4 \cdot cos^3(x) - 3 \cdot cos(x)$$

$$sin(\frac{1}{2}x) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - cos(x))} \qquad cos(\frac{1}{2}x) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + cos(x))}$$

$$sin(x) \pm sin(y) = 2 \cdot sin(\frac{x \pm y}{2}) \cdot cos(\frac{x \mp y}{2})$$

$$sin(x) \cdot sin(y) = \frac{1}{2} \cdot [cos(x - y) - cos(x + y)]$$
$$cos(x) \cdot cos(y) = \frac{1}{2} \cdot [cos(x - y) + cos(x + y)]$$
$$sin(x) \cdot cos(y) = \frac{1}{2} \cdot [sin(x - y) + sin(x + y)]$$

Trigonometrische Funktionen in der Physik

Fadenpendel: http://www.walter-fendt.de/ph14d/fadenpendel.htm

Federpendel: http://www.walter-fendt.de/ph14d/federpendel.htm

Viele Schwingungsvorgänge in der Natur werden durch komplizierte periodische Funktionen beschrieben, bei denen sich Amplitude und Periode zeitlich ändern können. So zum Beispiel bei gekoppelten oder erzwungenen Schwingungen.

Gekoppelte Schwingungen: http://www.walter-fendt.de/ph14d/gekopendel.htm

Erzwungene Schwingungen: http://www.walter-fendt.de/ph14d/resonanz.htm

Resonanz Katastrophe: Windentfachte Schwingung der Tacoma Bridge

Allgemeine Funktion zur Beschreibung einfacher Schwingungsvorgänge:

$$A(t) = A_0 \cdot sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

A_0 : max. Amplitude
ω : Kreisfrequenz
ϕ_0 : Phase

ω hängt vom schwingfähigen System ab, z.B. Fadenlänge, Masse, ..

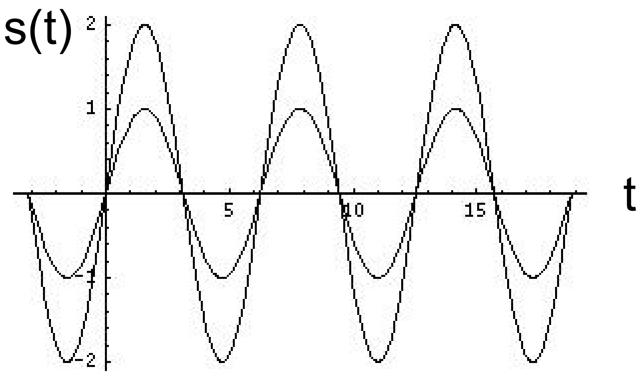
ϕ_0 wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt

Trigonometrische Funktionen

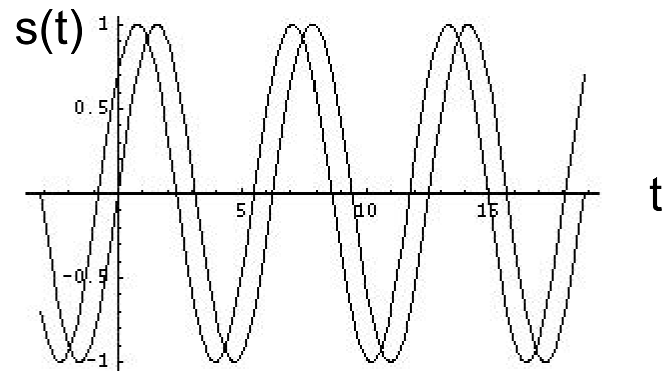
- Beschreibung einfacher Schwingungsvorgänge

$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

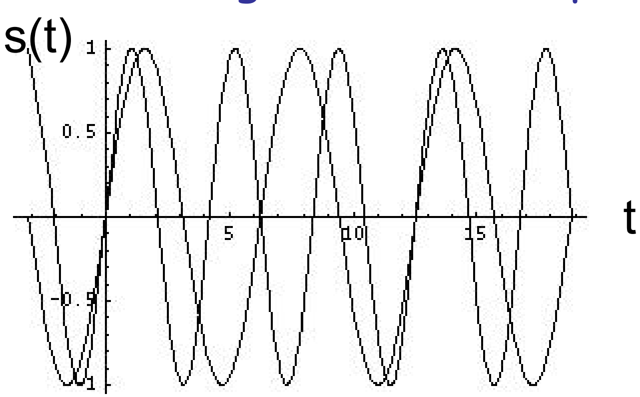
- Änderung der Amplitude A



- Änderung der Phase φ_0



- Änderung der Kreisfrequenz ω



Übungsaufgaben III: Funktionen

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151005_III.pdf

Funktionen - graphische Darstellung

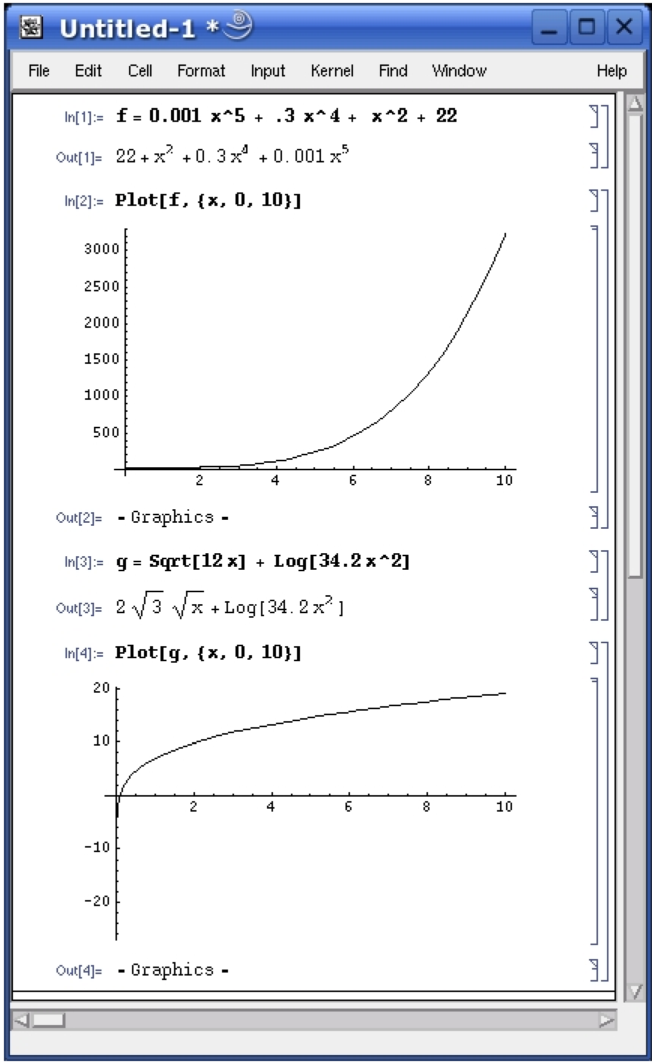
- Funktionsplotter in Java

  http://www.walter-fendt.de/m14d/ableitungen.htm
  http://www.mathe-online.at/fplotter/fplotter.html

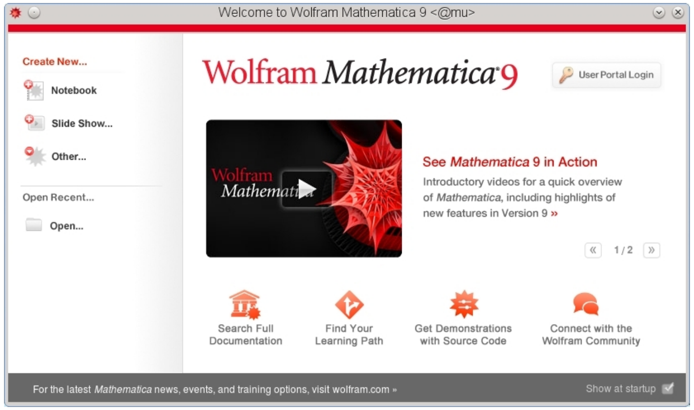
- Mathematische Software Pakete
  - Maxima – freie Software
    http://maxima.sourceforge.net/
  - Maple
  - Mathematica

Stehen in den Fakultäten oder im URZ zur Verfügung??

Sehr mächtiges Werkzeug
Einführung mit Beispiel notebooks z.B. unter
http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathematica/



Nützliche und sehr gute Dokumentation.



One Minute Demo:
Führen Sie dieses File aus mit installiertem mathematica aus
http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/MathematicaOneMinuteDemo.nb

mathematica player

- Erlaubt mathematica online demos anzusehen
- Ansehen von interactive mathematica documents im web browser
- Ansehen von mathematica Beispielen und Files

http://www.wolfram.com/cdf-player

mathematica Lizenzen

- 14 Tage Test Lizenz ist frei (danach 29 Euro / Semester).
  Bitte ausprobieren !!

Links: mathematica Lizenzen fuer Studenten

Infos 14 Tage Test Lizenz

Online Werkzeug

Mathematische Berechnungen Online

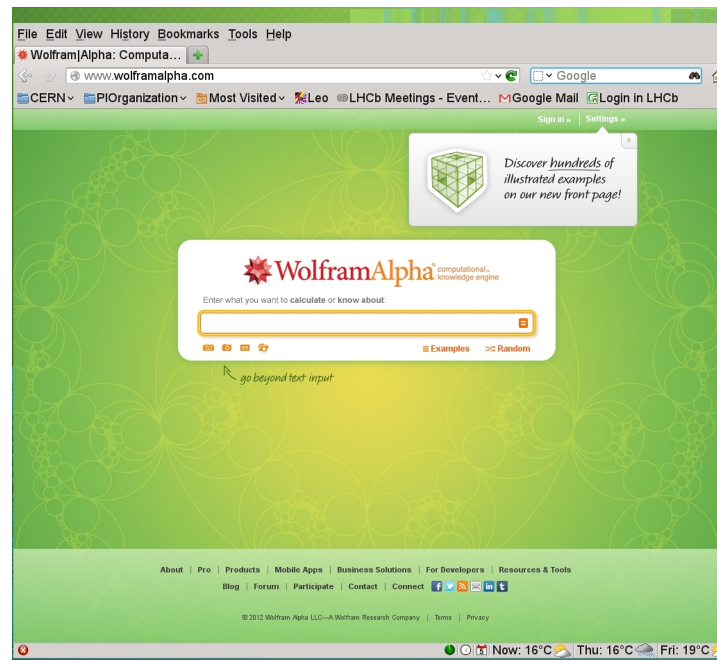
Wolfram Alpha – eine neue „Computational Knowledge Machine“

Ziel: Finde Antworten nicht nur durch Suchen in Datenbanken, sondern auch durch Berechnungen.

Merkmale:

- Dynamisch brechnete Resultate, e.g. teilweise Funktionalität von mathematica
- Keine strenge Syntaxbindung

http://www.wolframalpha.com/



Steht als app für tablet und smart phone zur Verfügung.

wolfram alpha pro ~ 3 Euro

Formelsammlung

- Trigonometrische Funktionen

$$|\sin(t)| \leq 1$$

$$|\cos(t)| \leq 1$$

$$\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$$

$$\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = m\pi, m \textit{ ganze Zahl}$$

$$\cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = (2m+1)\frac{\pi}{2}, m \textit{ ganze Zahl}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$