Programm 8.10.2015

- Integralrechnung
  - Problemstellung
  - Ober- und Untersummen, Definition Integral
  - Integrationsregeln
  - Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

- www Adressen
  - Folien und Aufgaben

    http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/

  - Java Anwendungen

    http://www.walter-fendt.de/m14d/ Mathe

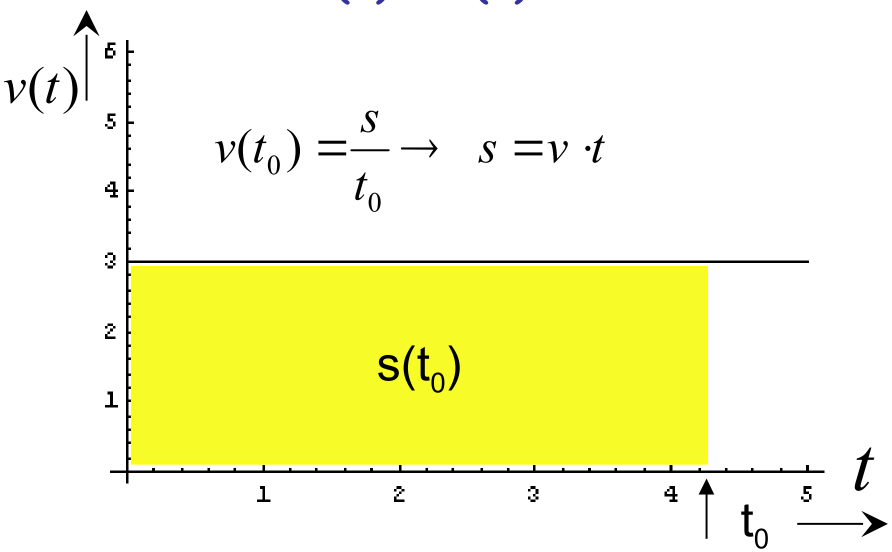
    http://www.walter-fendt.de/ph14d/ Physik

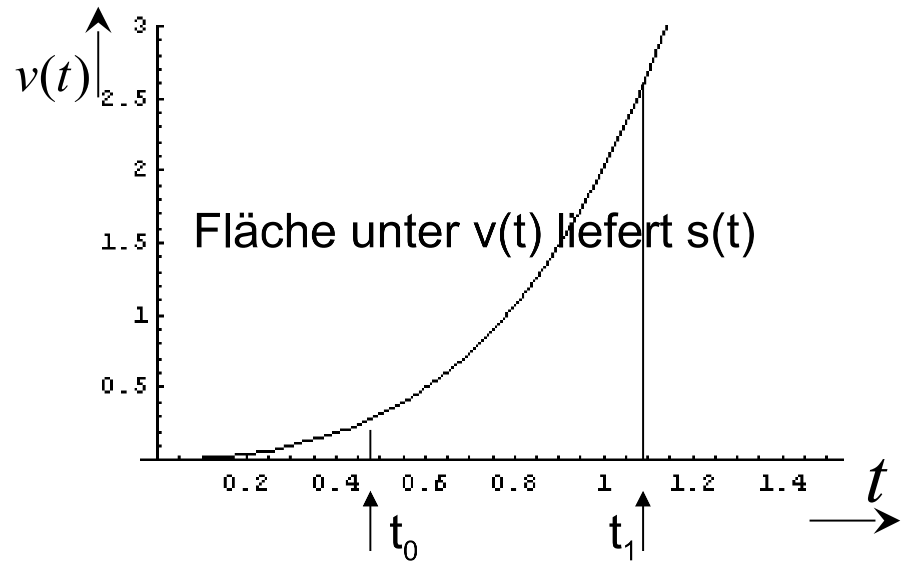
Einführung-Integralrechnung

Beschleunigte Bewegung

Messe den Weg als Funktion der Zeit in unserem “Spielexperiment”.
http://www.walter-fendt.de/ph14d/beschleunigung.htm
Die Differentialrechnung erlaubt dann die Bestimmung von v(t) = s’(t) und a(t)=s’’(t).

Läßt sich aus v(t)   s(t) bestimmen?





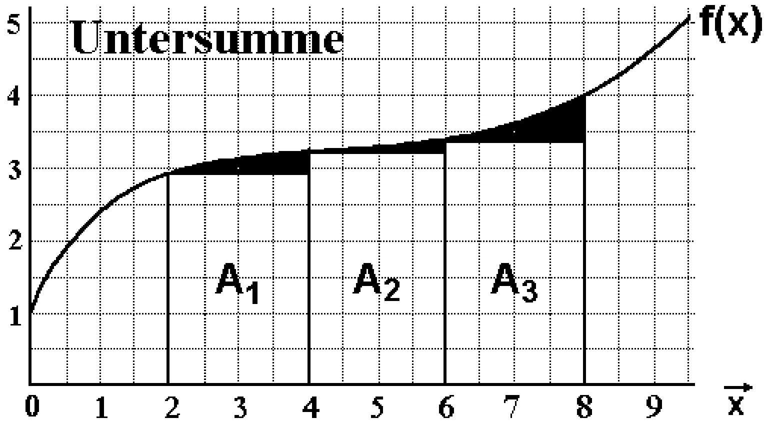
s(t) → v(t) Differenzieren

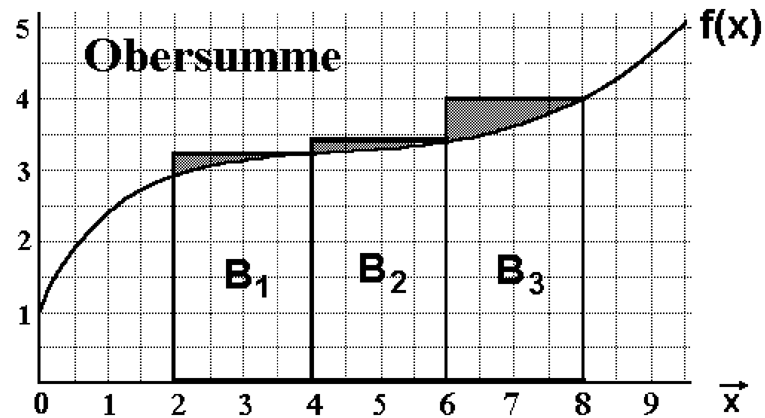
v(t) → s(t) Fläche unter der Kurve von v(t) betimmen.

Suche allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Fläche unter einer Funktion.

Einführung Integration

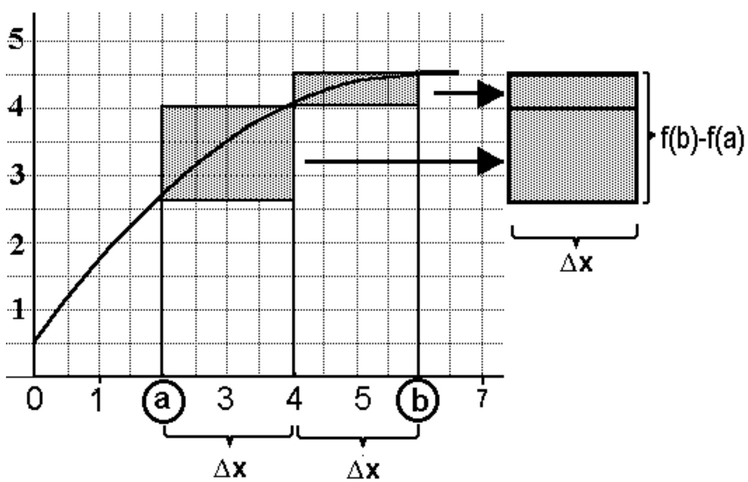
Unter- und Obersumme einer Funktion

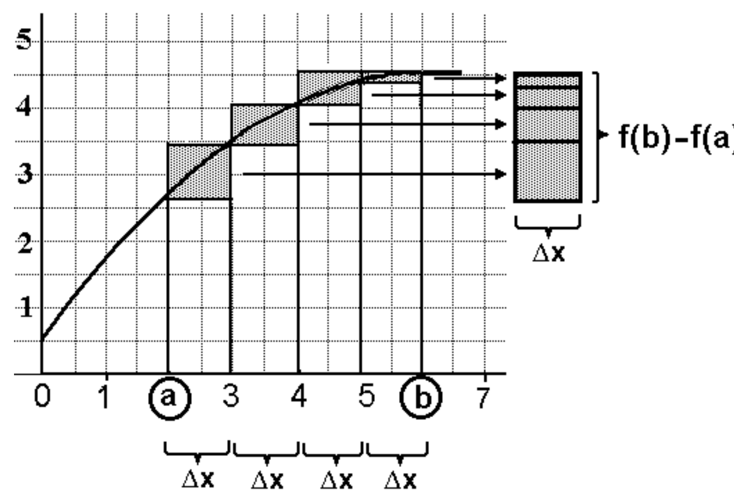




Teile Intervall in Stützstellen ein und nähere die Fläche unter der Kurve durch Rechtecke mit dem unteren Funktionswert (Untersumme) oder mit dem oberen Funktionswert (Obersumme) an.

Es gilt für f(x) > 0 im Intervall [a,b] : Untersumme ≤ Fläche ≤ Obersumme

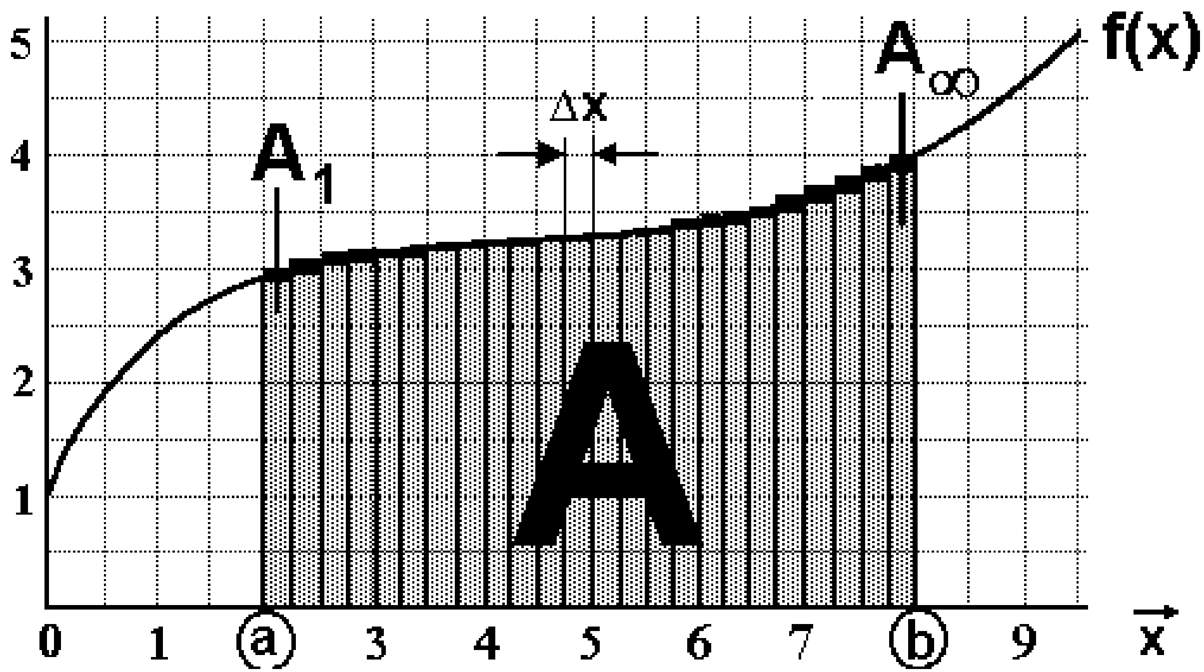




Einführung Integration

Integral einer Funktion

Bei immer feineren Unterteilungen lässt sich die wahre Fläche durch die Untersumme und Obersumme annähern. Der Grenzwert für immer feinere Unterteilungen heißt Integral von f(x).



$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\underline{x_i}) \cdot \Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x \qquad \text{für} \qquad \Delta x = \frac{a - b}{n}$$

Definitionen und Bezeichnungen

Definition des Integrals über Ober und Untersumme:

f sei eine auf dem Intervall [a,b] definierte und dort beschränkte Funktion.
f heißt dann Integrierbar über [a,b] , wenn das untere und obere Integral von f über [a,b] gleich sind: Die Zahl $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ heißt Integral über [a,b] und wird mit

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet.

Riemann'sche Definition:

Die reelle Funktion f sei auf dem Intervall [a,b] definiert und dort beschränkt.
f ist genau dann über [a,b] integrierbar, wenn es zu jeder positiven Zahl ε obere und untere Treppenfunktionen gibt, so daß $\left|\overline{I} - \underline{I}\right| < \varepsilon$ ist.

$$I = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f_i \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Integrand

[a,b] :=Integrationsgrenzen

Anschaulich bedeutet das Integralzeichen also:

Bilde die Summe aus allen Rechtecken mit den Seiten f(x) und dx, und zwar im Intervall [a,b], für unendlich feine Unterteilungen des Intervalls [a,b].

Illustration mit Riemann Summen:

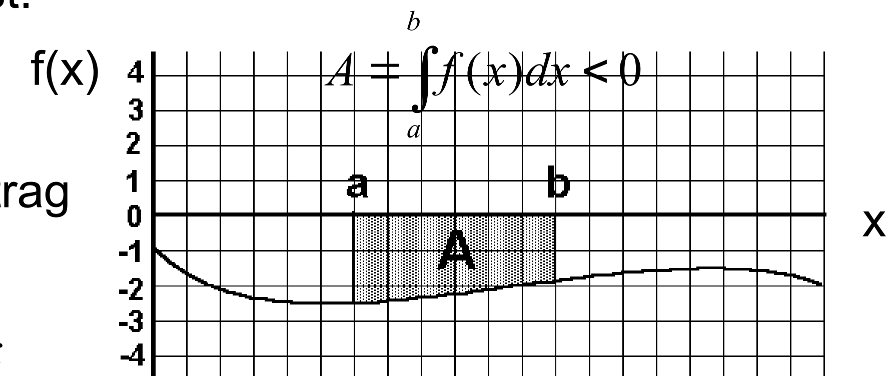
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/riemann/

Eigenschaften des Integrals von Funktionen

Das bestimmte Integral einer Funktion f(x) im Intervall [a,b] ist nur dann definiert, wenn die Funktion im Intervall [a,b] stetig ist.

Integral negativer Funktionswerte:

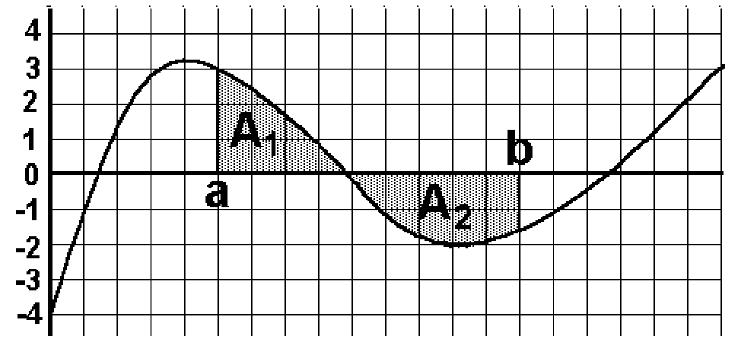
Das Integral einer Funktion mit f(x) < 0 im Intervall [a,b] ist gleich dem negativen Betrag des Flächeninhaltes A.



$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\underline{x_i}) \cdot \Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x$$

Das Integral einer Funktion mit f(x) < 0 und f(x) > 0 im Intervall [a,b] ist gleich

$$A = \int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$$



Vertauscht man die Integrationsgrenzen eines Integrals, so wechselt das Vorzeichen.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Übungsaufgaben Integralrechnung I:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151008_I.pdf

Stammfunktionen

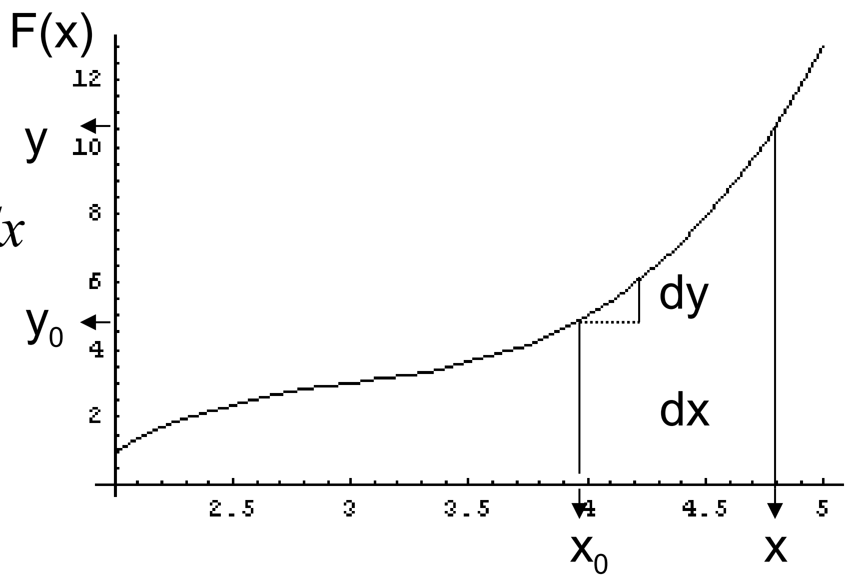
Bedeutung der Stammfunktion

Betrachte eine stetige Funktion F(x) im Intervall $[x_0,x]$

Differential dy: $dy = F'(x)dx$

$$y = F(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} dy = y_0 + \int_{x_0}^{x} F'(x)dx$$

Wir können also F(x) bestimmen, wenn wir eine Funktion f(x) finden, so daß F'(x) = f(x). $F(x) + y_0$ ist die Fläche unter dem Graphen der Funktion f(x) im Intervall $[x_0,x]$.



Stammfunktion:

F und f seien Funktionen, die auf der Menge A definiert sind. F heißt Stammfunktion zu f auf A, wenn F auf A differenzierbar ist und F'(x) = f(x) für alle $x \in A$ ist.

Übungsaufgaben Integralrechnung II:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151008_II.pdf

Eigenschaften der Integrale (1)

Integrierbarkeit

Sei f auf dem Intervall [a,b] definiert und monoton wachsend oder fallend,
Dann ist f integrierbar über [a,b].

Integrale von Potenzfunktionen

[a,b] sei positives Intervall. Für jede natürliche Zahl m gilt:

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

Linearität des Integrals

f_1 und f_2 seien über das Intervall [a,b] integrierbar. Dann ist auch $f_1 + f_2$ über das Intervall [a,b] integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

f sei über das Intervall [a,b] integrierbar und c ∈ R. Dann ist auch c · f über das Intervall [a,b] integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b (c \cdot f)(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Eigenschaften der Integrale(2)

Monotonie des Integrals

f_1 und f_2 seien über das Intervall [a,b] integrierbar. Wenn $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$$

Additivität des Integrals

Sei f auf dem Intervall [a,b] und [b,c] integrierbar. Dann ist f auch über das Intervall [a,c] integrierbar und es gilt:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

f sei an der Stelle a definiert, dann ist $\int_a^a f(x)dx = 0$

f sei über das Intervall [a,b] integrierbar, dann ist $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Mittelwert einer Funktion

Sei f auf dem Intervall [a,b] integrierbar. Dann heißt $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ Mittelwert der Funktion f auf dem Intervall [a,b].

Eigenschaften der Integrale(3)

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Sei f auf einer zusammenhängenden Menge A definiert und stetig und über jedes Teilintervall integrierbar, dann ist

$$F(x) = \int_c^x f(u)du$$

differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$

f sei über das Intervall [a,b] integrierbar und F eine Stammfunktion zu f auf [a,b], dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beachte: Stammfunktionen sind nur bis auf eine Konstante definiert. In der Physik wird die Eindeutigkeit häufig durch “Anfangsdedingungen” festgelegt.

Werkzeuge zum Integrieren

- http://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/integration2d/
- http://integrals.wolfram.com/

Übungsaufgaben Integralrechnung III:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151008_III.pdf

Formelsammlung

Liste mit wichtigen Ableitungen

f	f'
c	0
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Differentiationsregeln in Kurzform

Summenregel: $(f+g)' = f' + g'$
Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Kettenregel: $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$
Quotientenregel: $(f / g)' = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2$