# Mathematischer Vorkurs Physik A

Jörg Marks, Physikalisches Institut
marks@physi.uni-heidelberg.de

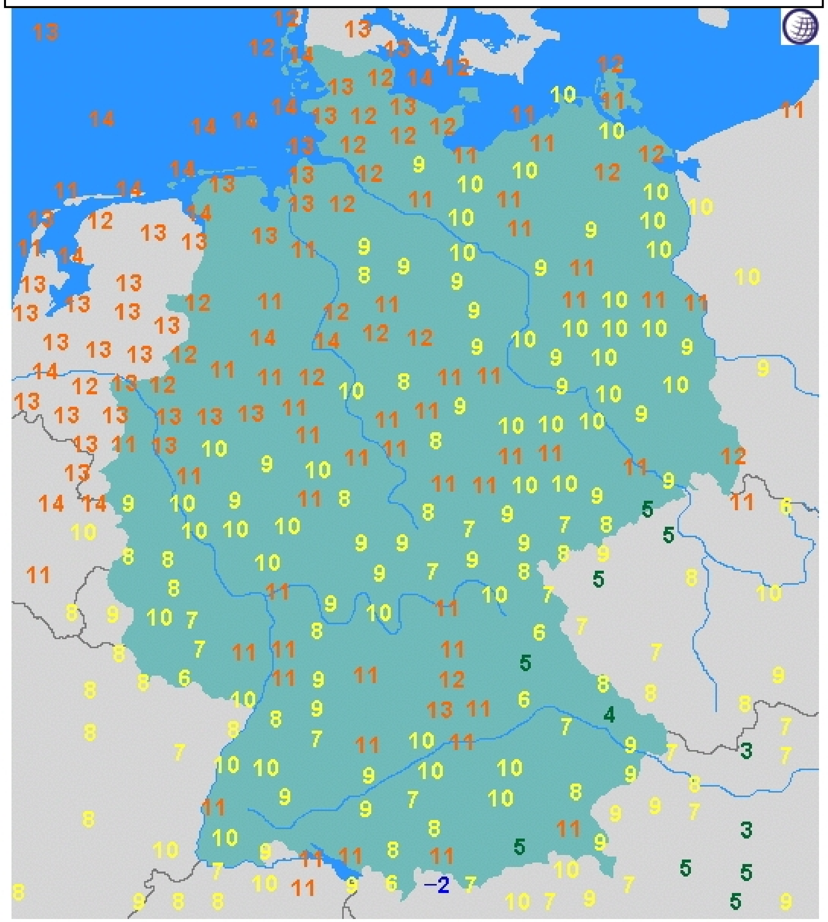
## Vektoren

- Einleitung
- Vektoralgebra
- Vektoren in kartesischen Koordinaten
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt
- Vektoranalysis – erste Schritte

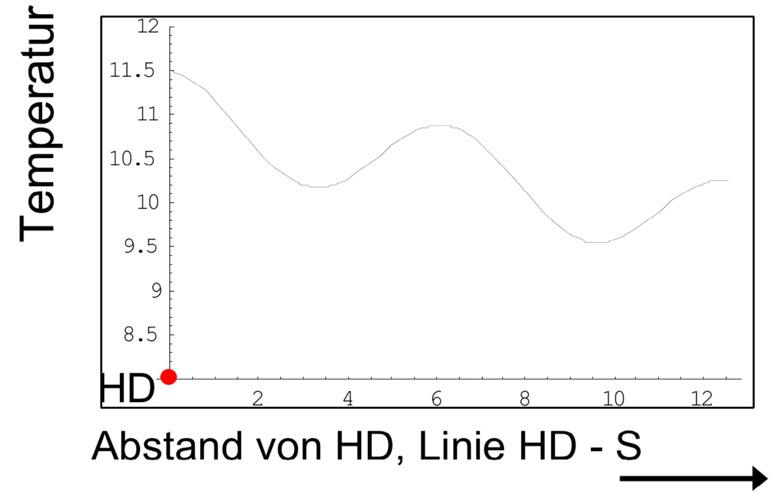
# Einleitung

- **Koordinatensysteme**

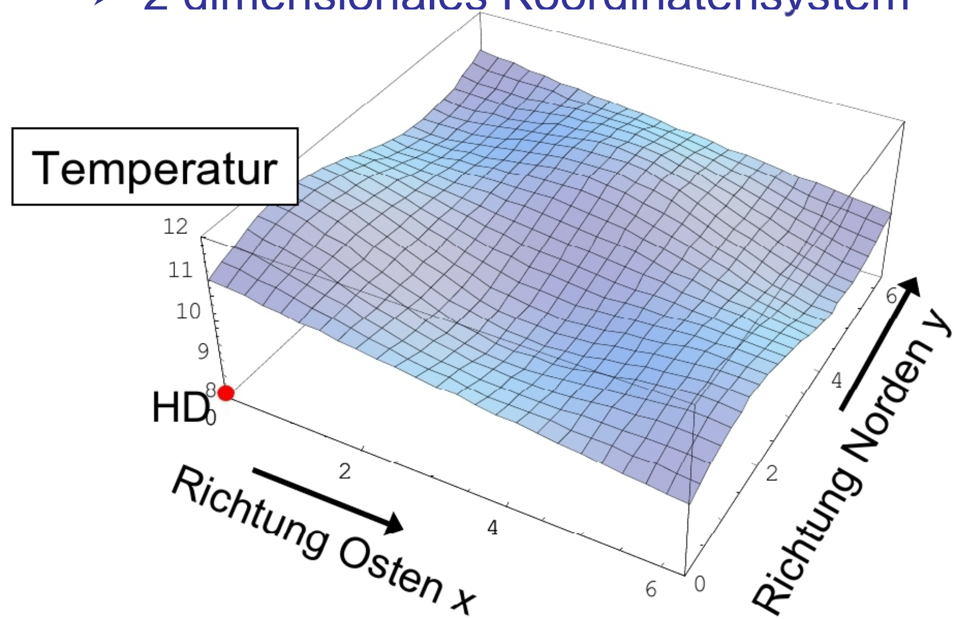
Temperaturverteilung in Deutschland



➢ 1 dimensionales Koordinatensystem

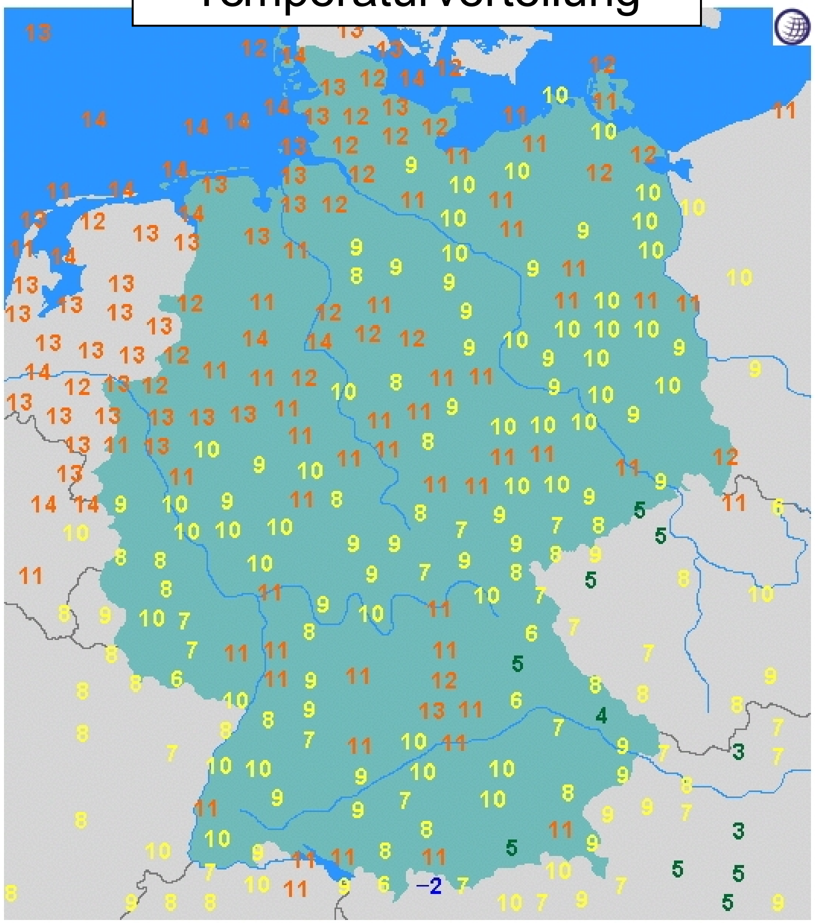



➢ 2 dimensionales Koordinatensystem

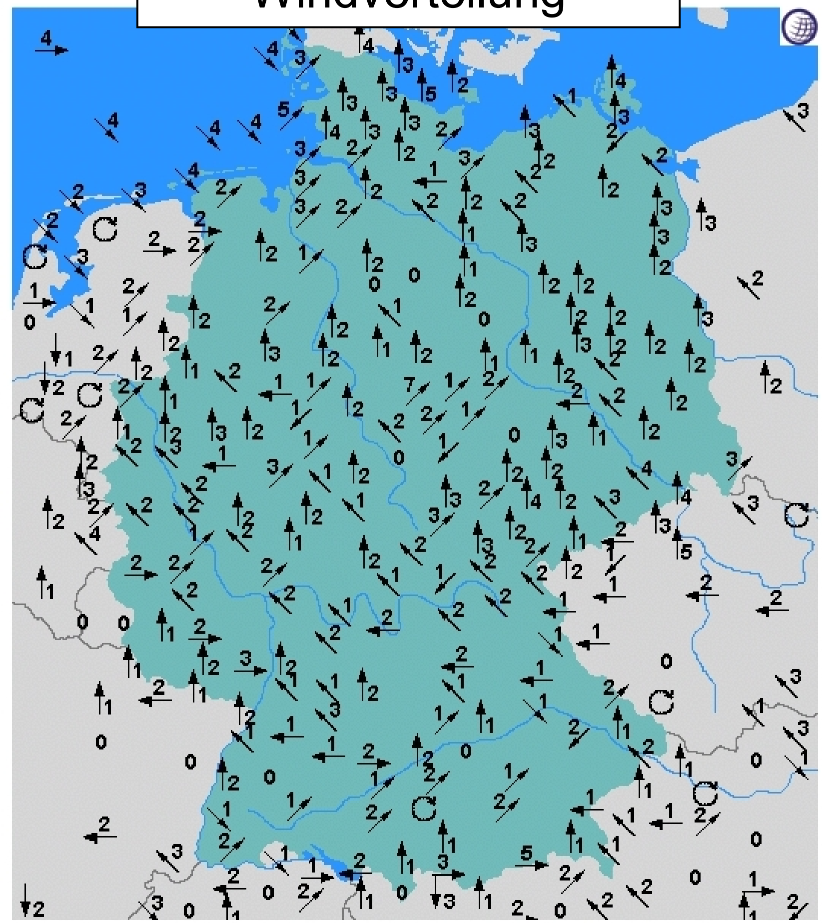


# Skalare und vektorielle Messgrößen

Temperaturverteilung



Windverteilung



Um die Windverteilung zu beschreiben, müssen wir sowohl die Windstärke als auch die Windrichtung berücksichtigen.

# Vektorrechnung

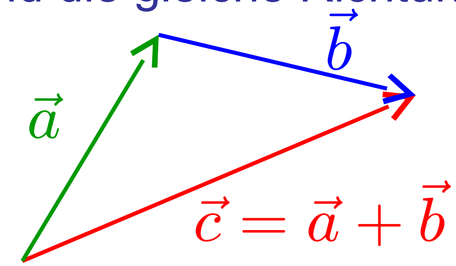
## Vektoralgebra

Durch geeignete Definitionen lassen sich die Rechenregeln mit reellen Zahlen auf Vektoren übertragen.

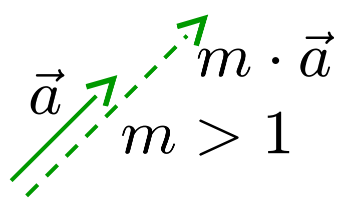
- 2 Vektoren sind gleich, wenn sie die gleiche Länge und die gleiche Richtung haben.

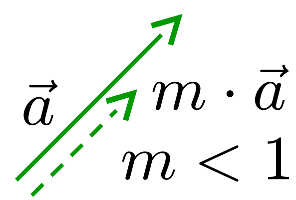
- Die Summe zweier Vektoren ist wieder ein Vektor.

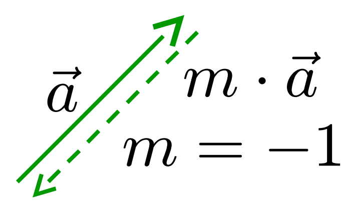
  Java Beispiel: http://www.walter-fendt.de/ph14d/reskraft.htm



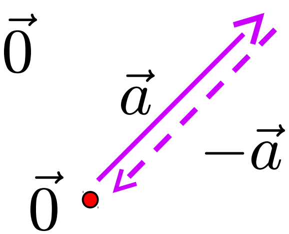

- Das Produkt eines Vektors mit einem Skalar ist wieder ein Vektor mit geänderter Länge, der parallel oder antiparallel zum ursprünglichen Vektor liegt.




- Es gibt zu $\vec{a}$ einen inversen Vektor $-\vec{a}$ , so das $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ den Null Vektor ergibt.



# Vektorrechnung

## Gesetze der Vektoralgebra

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$ Kommutativgesetz der Addition

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$ Assoziativgesetz der Addition

$$m \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot m$$ Kommutativgesetz der Multiplikation

$$m \cdot (n \cdot \vec{a}) = (n \cdot m) \cdot \vec{a}$$ Assoziativgesetz der Multiplikation

$$(m + n) \cdot \vec{a} = n \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a}$$ Distributivgesetz

$$m \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$$ Distributivgesetz

# Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

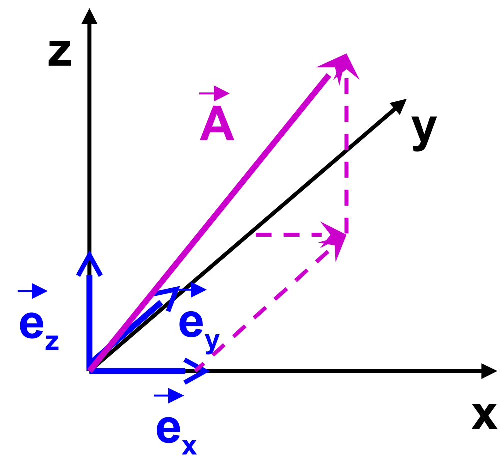
## Einheitsvektoren

Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind dimensionslose Vektoren der Länge 1, die in eine definierte Richtung zeigen, z.B. die Richtung der Achsen x,y,z in einem kartesischen Koordinatensystem.

Jeder Vektor $\vec{A}$ läßt sich als Linearkombination der Einheitsvektoren in einem Koordinatensystem darstellen. http://www.walter-fendt.de/m14d/vektor3d.htm

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

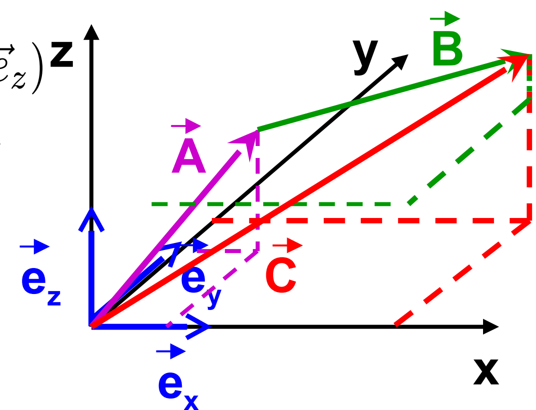
Zeilenvektor Spaltenvektor




http://www.walter-fendt.de/ph14d/zerlkraft.htm

## Vektoraddition

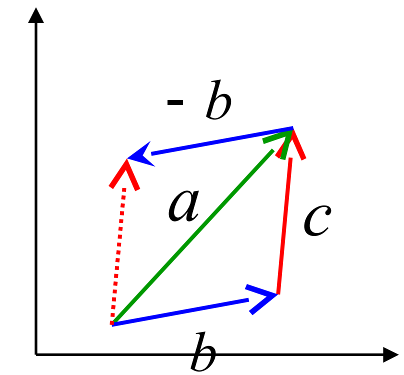
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z) + (B_x \cdot \vec{e}_x + B_y \cdot \vec{e}_y + B_z \cdot \vec{e}_z)$$
$$= (A_x + B_x) \cdot \vec{e}_x + (A_y + B_y) \cdot \vec{e}_y + (A_z + B_z) \cdot \vec{e}_z$$
$$= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{pmatrix}$$



# Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

## Vektorsubtraktion

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x\cdot\vec{e}_x-A_y\cdot\vec{e}_y-A_z\cdot\vec{e}_z)-(B_x\cdot\vec{e}_x-B_y\cdot\vec{e}_y-B_z\cdot\vec{e}_z)$$
$$=(A_x-B_x)\cdot\vec{e}_x-(A_y-B_y)\cdot\vec{e}_y-(A_z-B_z)\cdot\vec{e}_z$$
$$=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_x-B_x\\A_y-B_y\\A_z-B_z\end{pmatrix}$$

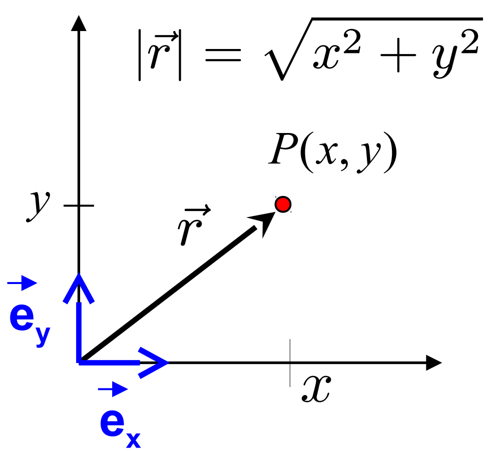



## Länge eines Vektors

Der Vektor zu einem Punkt P(x,y) in einem 2 dimensionalen Koordinatensystem wird als Ortsvektor $\vec{r}$ bezeichnet.

$$\vec{r}=x\cdot\vec{e}_x+y\cdot\vec{e}_y=(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Der Betrag eines Vektors $|\vec{r}|$ entspricht seiner Länge.



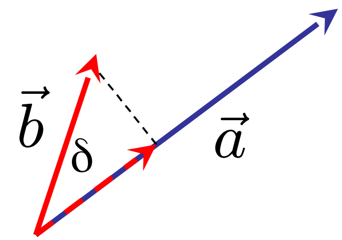

Übungsaufgaben Vektoren I:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151009_I.pdf

# Skalarprodukt

## Definition

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\delta$$




Das Ergebnis des Skalarproduktes ist kein Vektor!

http://mathinsight.org/dot_product

Es gilt:

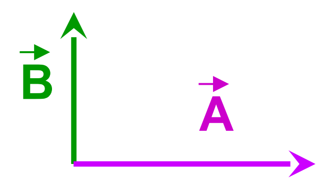
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$ Kommutativgesetz

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$ Assoziativgesetz

$$m \cdot (\vec{a} \cdot (\vec{b}) = (m \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot m$$

## Orthogonalität

Wenn $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{A}, \vec{B}$ nicht Nullvektoren sind, dann ist $\vec{A} \perp \vec{B}$

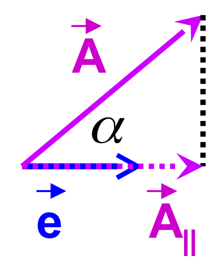



Im kartesischen Koordinatensystem bilden die Einheitsvektoren eine Orthonormalbasis

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \; wenn \; i \neq j \\ 1 \; wenn \; i = j \end{cases}$$

## Projektion

Komponente von $\vec{A}$ parallel zu $\vec{e}$ ist $A_{||} = \vec{A} \cdot \vec{e} = |\vec{A}| \cdot \cos\alpha$




Projektion von $\vec{A}$ auf $\vec{B}$ ist $A_{||B} = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = |\vec{A}| \cdot \cos\alpha$

# Skalarprodukt

## Komponentendarstellung

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z) \cdot (B_x \cdot \vec{e}_x + B_y \cdot \vec{e}_y + B_z \cdot \vec{e}_z)$$

$$= (A_x B_x) + (A_y B_y) + (A_z B_z)$$

## Länge und Einheitsvektoren

Die Länge eines Vektors läßt sich mit dem Skalarprodukt bestimmen

$$| \vec{A} | = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Einen Vektor der Länge 1 in Richtung von $\vec{A}$

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{| \vec{A} |} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

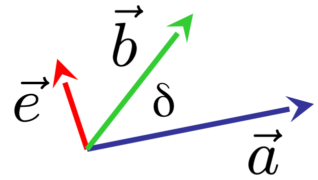
Übungsaufgaben Vektoren II:

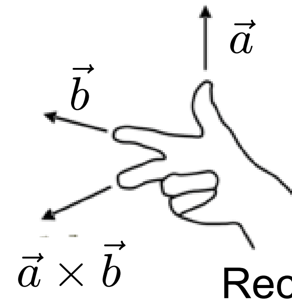
http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151009_II.pdf

# Kreuzprodukt / Vektorprodukt

## Definition

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e} \cdot |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot sin(\delta)$$




Rechte Hand Regel

Der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Die Richtung des Vektors wird durch die Rechte-Hand-Regel festgelegt. See http://mathinsight.org/cross_product

## Eigenschaften

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ Kommutativgesetz gilt nicht!

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Distributivgesetz

$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},\ wenn\ \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$

$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ Assoziativgesetz

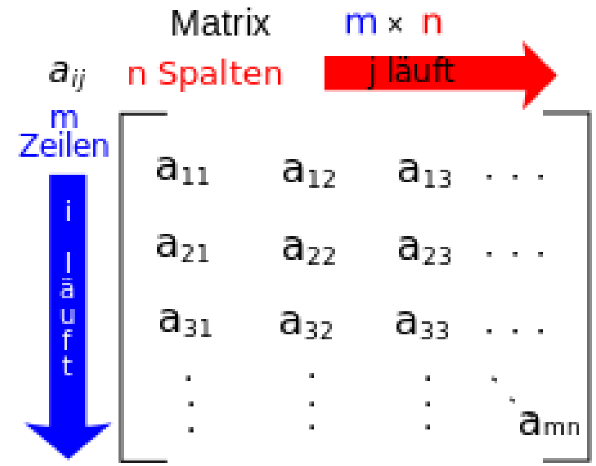
$$|\,\vec{a} \times \vec{b}\,|^2 = |\,\vec{a}\,|^2 \cdot |\,\vec{b}\,|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ und weitere entsprechend zyklischer Vertauschung

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ Graßmann Identität

# Matrizen und Determinante

## Matrix




Rechteckige Anordnung von Elementen :

2 x 2 – Matrix: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = m_{ij}$

Wichtiges Konzept der linearen Algebra; ein lineares Gleichungssytem läßt sich als Produkt einer Matrix mit einem Vektor darstellen.

## Determinante

Funktion, die einer quadratischen Matrix einen Skalar zuordnet.

2 x 2 – Matrix: $det M = det \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}$

## Laplacesche Entwicklung

$$det \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot det \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot det \begin{bmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot det \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}$$

Verallgemeinerung auf n x n – Matrix A:

$$det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det A_{ij}$$

$A_{ij}$ : (n-1) x (n-1) – Matrix

# Kreuzprodukt / Vektorprodukt

## Komponentendarstellung in kartesischen Koordinaten

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung auf n-dimensionalen Raum erfolgt über Determinanten

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = det \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{e_x} \cdot det \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{e_y} \cdot det \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{e_z} \cdot det \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{e_x} \cdot (A_y B_z - A_z B_y) - \vec{e_y} \cdot (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e_z} \cdot (A_x B_y - A_y B_x) = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

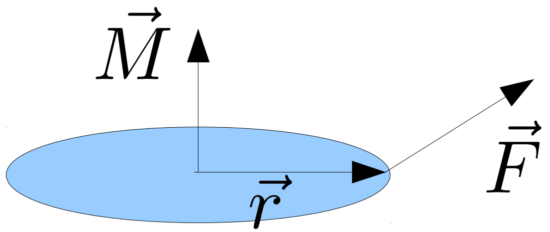
Mathematica Notebook Vektoralgebra

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/VektorRechnung.nb

# Beispiel Vektorprodukt

## Drehmoment

Eine Kraft $\vec{F}$ die im Abstand $\vec{r}$ an einen Körper angreift verursacht ein Drehmoment $\vec{M}$



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{e}_M \cdot \mid \vec{r} \mid \cdot \mid \vec{F} \mid \cdot sin(\delta)$$

Beispiel:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = det \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Spatprodukt

## Komponentendarstellung in kartesischen Koordinaten

$$V = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \left( \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = det \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$V$ ist das orientierte Volumen des durch die Vektoren aufgebauten Parallelepipeds. Bilden die Vektoren ein Rechtssystem ist das Vorzeichen positiv.

- nicht kommutativ
- zyklische Vertauschung ändert das Resultat nicht.

Übungsaufgaben Vektoren III:
http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151009_III.pdf

# Vektoranalysis

## Skalar- und Vektorfunktionen

Skalarfeld $T : \Re^3 \to \Re$ Temperaturverteilung, Massenverteilung,…

Vektorfeld $F : \Re^3 \to \Re^3$ Geschwindigkeitsverteilung, Strömungsverteilung,..

Jedem Raumpunkt P(x,y,z) wird ein Vektor **F** zugeordnet. Analog zur Differential- und Integralrechnug mit $f : \Re \to \Re$ benötigen wir dieses Konzept auch für Vektorfelder beziehungsweise für Vektorfunktionen.

→ Vektoranalysis

## Ableitung einfacher Vektorfunktionen

$\vec{r}(t)$ beschreibt den Ortsvektor entlang der Bewegungskurve eines Massenpunktes in einem kartesischen Koordinatensystem.

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

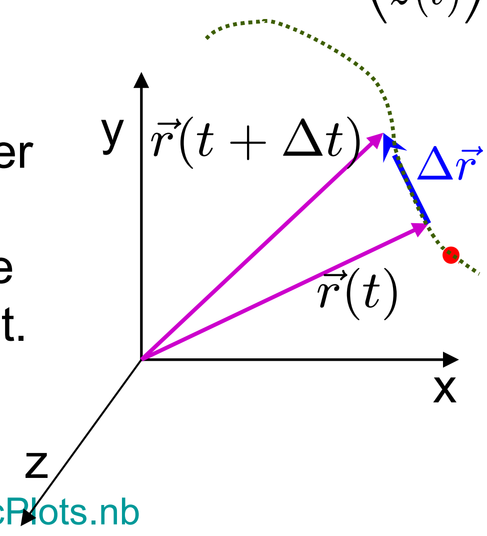
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

*Bedeutung der Abeitung:*

$\frac{d\vec{r}}{dt}$ ist ein Vektor in Richtung der Tangente an die Raumkurve im Punkt P(x,y,z) und beschreibt die Änderung des Weges mit der Zeit.

→ Geschwindigkeit




Mathematica Notebook mit Beispielen: Raumkurven
http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/VektorRechnungParametricPlots.nb

# Vektoranalysis

## Differentiationsregeln

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}(t)+\vec{B}(t)) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} + \frac{d\vec{B}(t)}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)) = \vec{A}(t)\cdot\frac{d\vec{B}(t)}{dt} + \vec{B}(t)\cdot\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)) = \vec{A}(t)\times\frac{d\vec{B}(t)}{dt} + \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\times\vec{B}(t) \quad \frac{d}{dt}(\varphi(t)\cdot\vec{B}(t)) = \varphi(t)\cdot\frac{d\vec{B}(t)}{dt} + \frac{d\varphi(t)}{dt}\cdot\vec{B}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)\times\vec{C}(t)) = \vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)\times\frac{d\vec{C}(t)}{dt} + \vec{A}(t)\cdot\frac{d\vec{B}(t)}{dt}\times\vec{C}(t) + \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\cdot\vec{B}(t)\times\vec{C}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)\times\vec{C}(t)) = \vec{A}(t)\times\vec{B}(t)\times\frac{d\vec{C}(t)}{dt} + \vec{A}(t)\times(\frac{d\vec{B}(t)}{dt}\times\vec{C}(t)) + \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\times(\vec{B}(t)\times\vec{C}(t))$$

## Partielle Ableitungen von Vektoren

Sei $A:\Re^3\rightarrow\Re^3,(x,y,z)\rightarrow\vec{A}(x,y,z)$ ein Vektorfeld, so können wir die partiellen Ableitungen definieren:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\vec{A}(x+\Delta x,y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta x}$$

Anschauliche Bedeutung: $\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}$ ist die Änderung des Vektors $\vec{A}$ in Richtung der x Achse.

Genauso: $\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y\rightarrow 0}\frac{\vec{A}(x,y+\Delta y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta x}$ $\qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z\rightarrow 0}\frac{\vec{A}(x,y,z+\Delta z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta z}$

# Vektoranalysis

## Partielle Ableitungen von Vektoren - ein Beispiel

Zwei Darstellungen eines Vektorfeldes:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} cos(xy) \\ 3xy - 2x^2 \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \vec{e_x} \cdot (cos(xy)) + \vec{e_y} \cdot (3xy - 2x^2) + \vec{e_z} \cdot (3x + 2y)$$

Bilde die partiellen Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y} und \frac{\partial A}{\partial z}$

Rezept: Für $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}$ bilden wir bei jeder Komponente des Vektorfeldes die Ableitung nach x und betrachten alle anderen Variablen als konstant.

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \begin{pmatrix} -y \cdot sin(xy) \\ 3y - 4x \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{e_x} \cdot (-y \cdot sin(xy)) + \vec{e_y} \cdot (3y - 4x) + \vec{e_z} \cdot (3)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -x \cdot sin(xy) \\ 3x \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{e_x} \cdot (-x \cdot sin(xy)) + \vec{e_y} \cdot (3x) + \vec{e_z} \cdot (2)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e_x} \cdot (0) + \vec{e_y} \cdot (0) + \vec{e_z} \cdot (0)$$

Übungsaufgaben Vektoren IV:

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151009_IV.pdf

# Gradient eines Skalarfeldes

## Darstellung von Skalar- und Vektorfeldern

Mathematica Notebook: Vektor Funktionen

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/VektorRechnungVektorFunktionPlot.nb

Mathematica Notebook: Skalare Funktionen

http://www.physi.uni-heidelberg.de/~marks/mathevorkurs/VektorRechnungSkalareFunktionPlot.nb

## Definition - Gradient

Sei $\phi$(x,y,z) in jedem Punkt (x,y,z) eines Gebietes definiert (differenzierbares Skalarfeld), dann ist der Gradient von $\phi$ , grad $\phi$ , $\nabla\phi$ definiert durch

$$\nabla\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi(x,y,z) = \vec{e_x} \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)) + \vec{e_y} \cdot (\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z))\vec{e_z} \cdot (\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z))$$

$\nabla$ := Nabla Operator

$\boxed{\nabla\phi \text{ ist ein Vektorfeld !}}$

# Gradient eines Skalarfeldes

## Eigenschaften – Gradient

- Die Komponente von grad $\phi$ in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{a}$ und heißt Richtungsableitung von $\phi$ in Richtung von $\vec{a}$

  Diese Größe ist ein Maß für die Änderung von $\phi$ in Richtung von $\vec{a}$.

- $\nabla\phi$ ist ein Vektor der senkrecht auf der Fläche $\phi(x,y,z)=c$ steht, wobei c eine Konstante ist.

  Warum ist $\phi(x,y,z)=c$ eine Fläche?

  Beispiel: $\phi(x,y)=x^2+y^2$ $\quad \phi(x,y)=c$ $\longrightarrow$ Kreisringe um den Ursprung

  Sei $\vec{r}=x\cdot\vec{e}_x+y\cdot\vec{e}_y+z\cdot\vec{e}_z$ der Ortsvektor zu einem Punkt P(x,y,z) auf der Fläche. Dann liegt $d\vec{r}=dx\cdot\vec{e}_x+dy\cdot\vec{e}_y+dz\cdot\vec{e}_z$ in der Tangentialebene in P.

  Die Größe $d\phi$ ist das total Differential und wie folgt definiert:

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$d\phi=0$ , weil $\phi(x,y,z)=c$

$$d\varphi=0=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}}_{\nabla\phi}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix}}_{d\vec{r}}$$

$$\nabla\varphi\cdot d\vec{r}=0$$

> Der Gradient steht senkrecht auf der Fläche.

Übungsaufgaben Vektoren V:

http://www.physi.uniheidelberg.de/~marks/mathevorkurs/Aufgaben/Aufgaben20151009_V.pdf