Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Felix Schaaf

Universität Heidelberg

29.11.2024

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Frequentist-Zugang

Zufallsexperiment wird n-mal durchgeführt. Ereignis $\{i\}$ tritt n_i mal auf.

Wahrscheinlichkeit $\leftrightarrow$ welcher Versuchsausgang passiert wie häufig?

Frequentist-Wahrscheinlichkeit

$$\Rightarrow p_i = \frac{\#\text{wünschenswerte Ausgänge}}{\#\text{mögliche Ausgänge}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n}$$

$\Rightarrow$ "Frequenz", mit der Ereignis $\{i\}$ auftritt

diskreter Fall

Kontinuierliche Verteilugen

Kontinuierliche Ortsvariable x, Ortspunkt x_0.

$$p(x = x_0) = ?$$

$$p(x = x_0) = 0$$

Nach **diskreten** Punkten zu fragen, ist bei **kontinuierlichen** Verteilungen nicht sinnvoll.

Kontinuierliche Verteilungen

Besser: Frage nach einem **Intervall**.

$$p(x \leq \lambda) = \,?$$

$$p(x \leq \lambda) \equiv P(\lambda) \quad \text{kummulative Wahrscheinlichkeitsverteilung}$$

Falls $P(\lambda)$ differenzierbar ist, gilt

$$P(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}x \; \rho(x) \quad \text{mit} \quad \rho(\lambda) = \frac{\mathrm{d}P(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeits**dichte**funktion $\rho(x)$

Kontinuierliche Verteilungen

Wahrscheinlichkeit x in einem Intervall $[x_1, x_2]$ zu finden:

$$p(x_1 \leq x \leq x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \ \rho(x)$$

Für ein kleines Intervall $x \in [x_0, x_0 + dx]$ ist die Wahrscheinlichkeit gerade

$$\rho(x_0)dx.$$

Wir nennen $\rho(x)$ **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Normierung

Gesamtwahrscheinlichkeit soll 1 sein $\Rightarrow$ Normierung der Verteilung

$$P(x \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \rho(x) \stackrel{!}{=} 1$$

Ggf. muss der Integrationsbereich an die Zufallsvariable angepasst werden, z.B: Teilchen in einem unendlichen Potentialtopf der Breite L $\Rightarrow$ nur $x \in [0, L]$ möglich $\Rightarrow \int_0^L \mathrm{d}x \; \rho(x) = 1$.

Momente

n-tes Moment:

$$\langle x^n \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x^n \; \rho(x)$$

$\Rightarrow$ Erwartungswert der Zufallsvariable $=$ erstes Moment $=$ Mittelwert

Mittelwert einer Verteilung

$$\langle x \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x \; \rho(x) \equiv \mu$$

Zentrale Momente

Besser zur Beschreibung der Verteilung: **zentrale** Momente $\langle (x - \boldsymbol{\mu})^n \rangle$.

$$\langle (x-\mu)^n \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; (x-\mu)^n \; \rho(x) \equiv \mu_n$$

Varianz einer Verteilung

$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; (x-\mu)^2 \; \rho(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \equiv \sigma^2$$

Beschreibt die Streuung um den Mittelwert, "Breite der Verteilung"

Zentrale Momente

$\Rightarrow$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

Mittelwert μ und *Standardabweichung* σ sind meistens die relevantesten Größen zur Beschreibung einer Verteilung.

Weitere, seltener verwendete Größen sind z.B. die Schiefe $\frac{\langle (x-\mu)^3 \rangle}{\sigma^3}$ und die Wölbung $\frac{\langle (x-\mu)^4 \rangle}{\sigma^4}$ einer Verteilung.

Überblick

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \rho(x)$$

$$1 = \sum_{i=1}^{N} p_i$$

$$\mu = \langle x \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x\ \rho(x)$$

$$\mu = \langle i \rangle = \sum_{i=1}^{N} i\ p_i$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ (x-\mu)^2\ \rho(x)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (i-\mu)^2\ p_i$$

Inhaltsverzeichnis

Binomialverteilung

- **diskrete** Verteilung
- beschreibt Zufallsexperiment mit **zwei möglichen Elementarereignissen**
- zwei Wahrscheinlichkeiten p und q mit $p + q = 1$ ($\rightarrow$ Normierung)
- Ereignisse sind unabhängig

Konstruktion der Binomialverteilung

Grundlegende Situation:

- Elementarereignis $\boldsymbol{A}$ und Gegenereignis $\bar{\boldsymbol{A}}$
- Wahrscheinlichkeit für $\boldsymbol{A}$ ist $p(\boldsymbol{A}) \equiv p \Rightarrow p(\bar{\boldsymbol{A}}) = 1 - p \equiv q$
- N Durchgänge ("Ziehungen") pro Experiment

Fragestellung: Wie oft tritt Ereignis $\boldsymbol{A}$ in N Durchgängen auf bzw. was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\boldsymbol{A}$ genau i-mal auftritt?

Konstruktion der Binomialverteilung

Gemeinsame Wahrscheinlichkeit unabhängiger Ereignisse

Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei **unabhängige** Ereignisse. Dann ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit

$$p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = p(\boldsymbol{A}) \cdot p(\boldsymbol{B}) = p(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$$

$$\Rightarrow p(\underbrace{\boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{A}}_{i\text{-mal}}, \underbrace{\bar{\boldsymbol{A}}, \ldots, \bar{\boldsymbol{A}}}_{(N-i)\text{-mal}}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{i\text{-mal}} \cdot \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{(N-i)\text{-mal}} = p^i q^{N-i}$$

Konstruktion der Binomialverteilung

Ereignisse unabhängig $\Leftrightarrow$ Permutationen sind gleichwertig
Erinnerung:

$$p_i = \frac{\#\text{wünschenswerte Ausgänge}}{\#\text{mögliche Ausgänge}}$$

$\Rightarrow$ Anzahl der Permutationen berücksichtigen

Binomialkoeffizient

Die Anzahl der Permutationen ist durch den Binomialkoeffizient gegeben.

Binomialkoeffizient

$$\#\text{Möglichkeiten } i \text{ Elemente auf } N \text{ Plätzen zu verteilen} = \binom{N}{i},$$

$$\text{wobei } \binom{N}{i} = \frac{N!}{i!\,(N-i)!}.$$

Binomialverteilung

Damit finden wir die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung, die

Binomialverteilung

$$p_i = B(i; p, N) = \binom{N}{i} p^i q^{N-i} \quad \text{mit } q = 1 - p \text{ und } i \leq N$$

Eigenschaften der Binomialverteilung

$$\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i q^{N-i} \overset{\substack{\text{allg. binomische} \\ \text{Formel}}}{=} (p+q)^N = 1^N = 1 \qquad \text{(Normierung)}$$

$$\mu = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \, i \, p^i q^{N-i} = N \cdot p \qquad \text{(Mittelwert)}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (i-\mu)^2 p^i q^{N-i} = N \cdot p \cdot q \qquad \text{(Varianz)}$$

Momente der Binomialverteilung

Ein Trick, um die Momente der Binomialverteilung zu berechnen, besteht darin zu erkennen, dass $i^N p^i = \left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^N p^i$ gilt. Damit folgt dann

$$
\begin{aligned}
\langle i^N \rangle &= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \, i^N p^i q^{N-i} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \, \left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^N p^i q^{N-i} = \left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^N (p+q)^N .
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass $p + q = 1$ erst **nach** dem Ableiten eingesetzt werden darf.

Beispiele Binomialverteilung

Beispiel

Münzwurf.

- Ereignisse: Kopf $\boldsymbol{H}$ oder Zahl $\boldsymbol{Z} = \bar{\boldsymbol{H}}$
- $p = q = 1/2$
- $\mu = N \cdot p = N/2$
- $\sigma^2 = N \cdot p \cdot q = N/4$

Beispiele Binomialverteilung

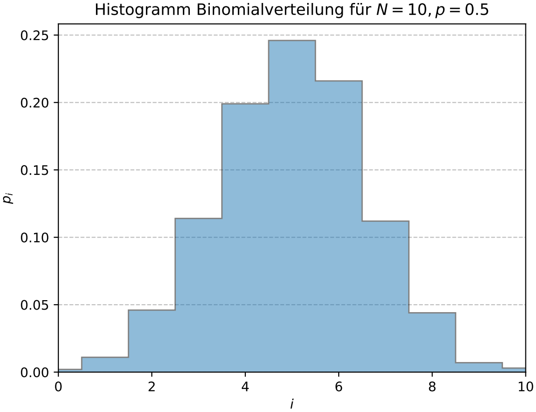

Abbildung: Histogramm einer Binomialverteilung.

Beispiele Binomialverteilung

Beispiel

$N = 10^{24}$ Gasatome in einer Box mit zwei Abteilen. Abteil 1 nimmt $1/4$ des Gesamtvolumens ein.

- Ereignisse: Atom in Abteil 1 $\boldsymbol{A}$ oder in Abteil 2 $\bar{\boldsymbol{A}}$
- $p = p(A) = V_1/V_{ges} = 1/4$
- $\mu = N \cdot p = 25^{23}$ Atome durchschnittlich in Abteil 1
- $\sigma^2 = N \cdot p \cdot q = 1.875 \cdot 10^{23}$
- Sehr geringe relative Abweichung $\sigma/\mu \approx 1.7 \cdot 10^{-12}$

Inhaltsverzeichnis

Konstruktion der Gaußverteilung

Wir betrachten nun den Grenzfall $N \to \infty$ für $p = \text{const}$. Also

$$p = \text{const}, \quad N \to \infty$$

$$\Rightarrow \mu = N \cdot p \to \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}}{N \cdot p} = \sqrt{\frac{1-p}{p}} \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0$$

Konstruktion der Gaußverteilung

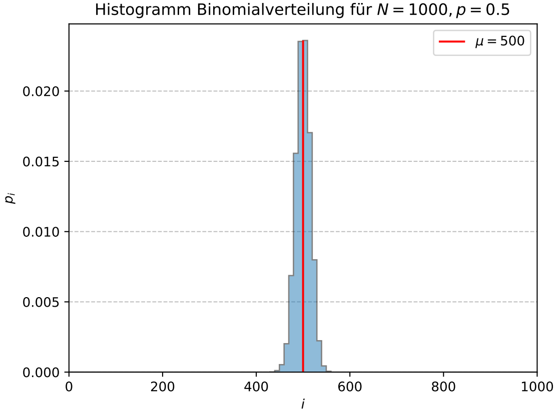

Abbildung: Das Maximum der Binomialverteilung liegt nahe dem beim Mittelwert.

Konstruktion der Gaußverteilung

Maximum i_{max} stimmt in unserem Grenzfall mit dem Mittelwert μ überein.
Taylorentwicklung von $\ln p_i$ um μ:

$$\ln p_i = \ln p_{max} - \frac{1}{2\sigma^2}(i-\mu)^2 + \dots$$

Von $\ln p_i$ zurück zu p_i:

$$p_i = e^{\ln p_i} = p_{max}\ e^{-\frac{(i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Konstruktion der Gaußverteilung

Übergang zur kontinuierlichen Variable x:

$$x = N \cdot \Delta x, \quad \mu_x = \mu \cdot \Delta x, \quad \sigma_x = \sigma \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x \propto \frac{1}{N} \xrightarrow{N \to \infty} 0$$
$$\Rightarrow \mu_x = p \cdot N \cdot \Delta x = \text{const}$$
$$\Rightarrow \sigma_x = p \cdot q \cdot N \cdot \Delta x = \text{const}$$

Konstruktion der Gaußverteilung

$\Delta x \to 0 \Rightarrow$ **kontinuierliche** Verteilung.

Normierung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; p_{max} \; e^{-\frac{(i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \overset{!}{=} 1$$

$$\overset{\text{Gauß-Int.}}{\iff} \; p_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

Gaußverteilung

Für die Bezeichnung der neuen Verteilung schreiben wir die Parameter als $\mu_x \equiv \mu$ und $\sigma_x \equiv \sigma$, und nennen sie

Gaußverteilung (Normalverteilung)

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Gaußverteilung

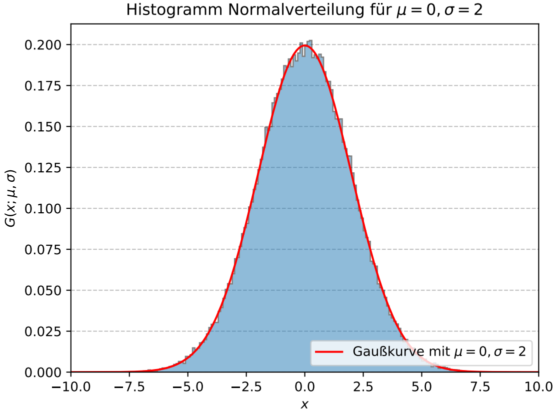

Abbildung: Histogramm und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Gaußverteilung.

σ-Bereiche

Die Wahrscheinlichkeiten, x in einem Intervall $\pm n\sigma$ um den Mittelwert zu finden, sind gegeben durch

$$p(\mu - n\sigma \leq x \leq \mu + n\sigma) = \int_{-n\sigma}^{n\sigma} \mathrm{d}x \; G(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} 0.683 & n = 1 \\ 0.954 & n = 2 \\ 0.997 & n = 3 \end{cases}$$

Zentraler Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz

Seien x_i n unabhängige Zufallsvariablen einer unbekannten Verteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Die Summe

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(Mittelwert der Daten)}$$

für $n \to \infty$ normalverteilt. Der Mittelwert dieser Normalverteilung ist dann $\mu_X = \mu$ und die Varianz $\sigma_X^2 = \sigma^2/n$.

Zentraler Grenzwertsatz

Für hinreichend große Stichprobenumfänge kann man die Verteilung der Mittelwerte mit einer Normalverteilung näheren.

$\Rightarrow$ Können von Mittelwertverteilung auf Eigenschaften der grundlegenden Verteilung der Zufallsvariablen schließen

Gaußverteilung

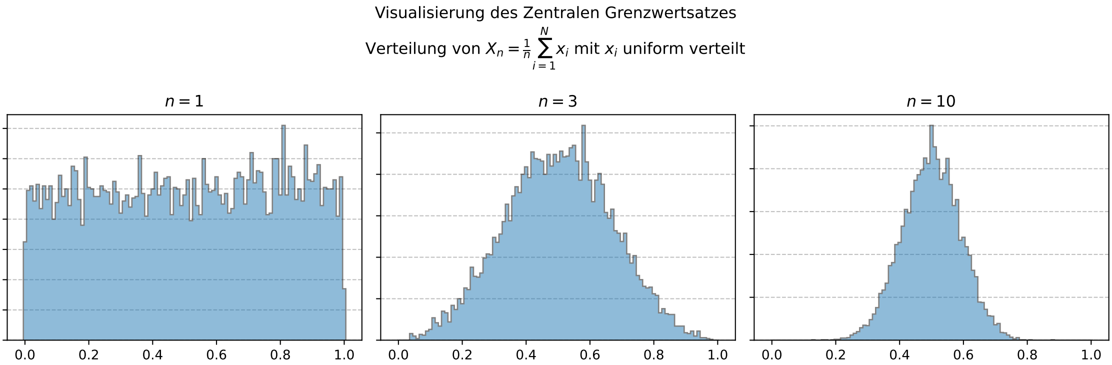

Abbildung: Zentraler Grenzwertsatz. Für größere n nähern sich die Mittelwerte X_n einer Gaußverteilung an.

Inhaltsverzeichnis

Konstruktion der Poissonverteilung

Betrachten neuen Grenzfall $N \to \infty$ und $p \to 0$ (seltene Ereignisse)
Aber:

$$p \cdot N = \mu = \text{const}$$

Konstruktion der Poissonverteilung

$$N \to \infty, \quad p \to 0, \quad \mu = \text{const}$$

$$p_i = \frac{N!}{(N-i)!\; i!}\; p^i q^{N-i} = \frac{N(N-1)\ldots(N-i+1)}{i!} \left(\frac{\mu}{N}\right)^i \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-i}$$

$$= \frac{N(N-1)\ldots(N-i+1)}{N^i} \left(\frac{\mu^i}{i!}\right) \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{-i}$$

Poisson-Verteilung

Damit finden wir die **diskrete**

Poissonverteilung

$$P(i;\mu) = \frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu}$$

Eigenschaften der Poissonverteilung

$$\sum_{i=0}^{\infty} = \frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu} = e^{-\mu} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!}}_{=e^{\mu}} = e^{-\mu}e^{\mu} = 1 \qquad \text{(Normierung)}$$

$$\langle i \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{k=i-1=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = \mu e^{-\mu}e^{\mu} = \mu \qquad \text{(Mittelwert)}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{\infty}(i-\mu)^2\frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu} = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} i^2\frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu}\right)}_{=\mu(\mu+1)} - \mu^2 = \mu \qquad \text{(Varianz)}$$

Momente der Poissonverteilung

Betrachte

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\mu^i e^{-\mu}\right) = \mu\left(i\mu^{i-1}e^{-\mu} - \mu^i e^{-\mu}\right) = \left(i\mu^i - \mu^{i+1}\right)e^{-\mu}.$$

Damit folgt

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\langle i^n\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{i^n}{i!}\left(i\mu^i - \mu^{i+1}\right)e^{-\mu} = \langle i^{n+1}\rangle - \mu\langle i^n\rangle.$$

Durch Umstellen erhält man die Rekursionsformel

$$\langle i^{n+1}\rangle = \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\langle i^n\rangle + \mu\langle i^n\rangle.$$

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung ist also eine

- **diskrete** Verteilung
- mit nur einem Parameter μ (oft auch mit λ bezeichnet)
- und der besonderen Eigenschaft $\langle i \rangle = \mu = \sigma^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\mu.}$

Poissonverteilung

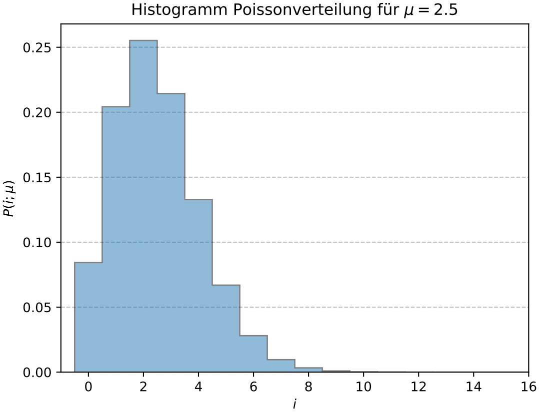

Abbildung: Histogramm einer Poissonvertilung.

Beispiel Poissonverteilung

Beispiel

Radioaktiver Zerfall.
Radioaktiver Kern mit Zerfallsrate $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.
Die Wahrscheinlichkeit für i Zerfälle in Zeit Δt ist Poisson-verteilt:

$$P(i) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^i}{i!} e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

Übersicht

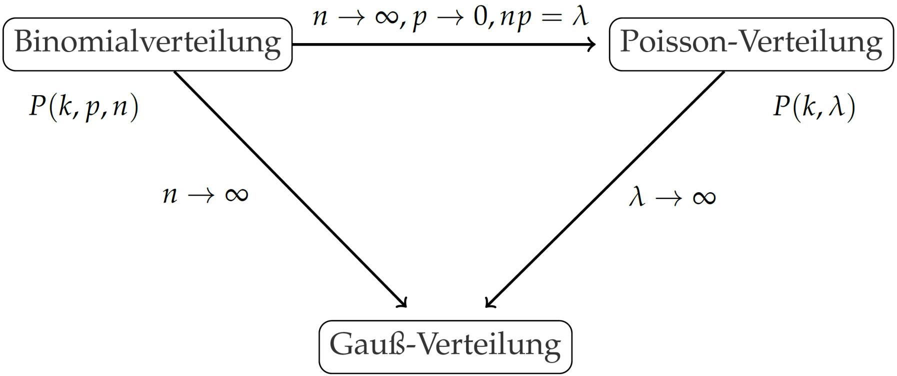

Abbildung: Grenzübergänge zwischen Binomial-, Poisson- und Gaußverteilung. Aus [2], Seite 14.

Inhaltsverzeichnis

[1] Prof. Ulrich Schwarz
Theoretical Statistical Physics (Lecture Script Winter term 2022/23)
Universität Heidelberg (24.02.2023), 1-15.

[2] Markus Köhl, Klaus Reygers
Statistische Methoden in der Experimentalphysik
Universität Heidelberg, Version 1.03 (22.05.2023), 7-15.

[3] Wikibooks
Statistik: Zentraler Grenzwertsatz
https://de.wikibooks.org/wiki/Statistik:_Zentraler_Grenzwertsatz (29.11.2024)

[4] Statista
Definition Zentraler Gerenzwertsatz
https://de.statista.com/statistik/lexikon/definition/145/zentraler_grenzwertsatz/ (28.11.2024)

[5] LEIFI-Physik
Radioaktivität - Fortführung
https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/radioaktivitaet-fortfuehrung/grundwissen/zerfallsgesetz-zerfallskonstante-und-halbwertszeit (28.11.2024)