C++/Root - Verteilungen und ihre Implementierung

S. Stezura
University of Heidelberg

27/02/17

Inhalt

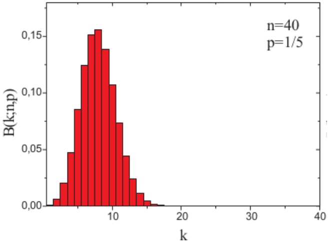
Inhalt

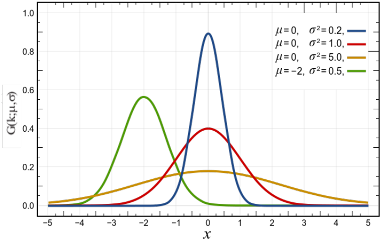
Verteilungen

- Es gibt unterschiedlichste Verteilungen
- Mathematische Beschreibung unter "Maßtheorie"
- Diskrete und stetige Verteilungen werden unterschieden

Verteilungen

- Es gibt unterschiedlichste Verteilungen
- Mathematische Beschreibung unter "Maßtheorie"
- Diskrete und stetige Verteilungen werden unterschieden





Wozu Verteilungen?

- Meßgrößen haben statistische Schwankungen
- Zerfälle von Atomen können mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben werden
- Verteilung von Fermionen in einem Fermigas $\rightarrow$ Fermi-Dirac Verteilung
- Maxwell-Boltzmann Verteilung beschreibt Bewegung von idealen Gasteilchen

Diskrete Binomialverteilung

$$B(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Normierung: $\sum_{k=0}^{n} B(k,n,p) = 1$
- Mittelwert: $< k >= \sum_{k=0}^{n} k \; B(k,n,p) = np$
- Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \; B(k,n,p) - < k >^2 = np(1-p)$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

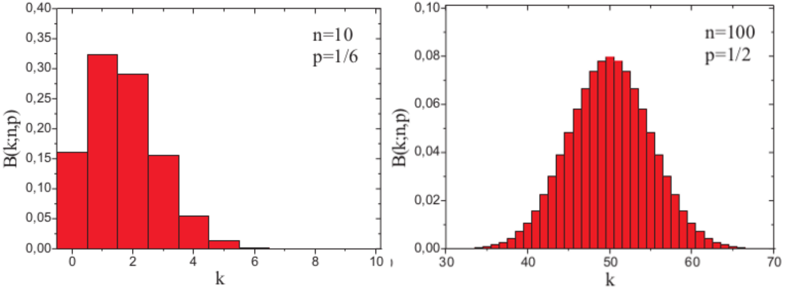
Diskrete Binomialverteilung

$$B(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Normierung: $\sum_{k=0}^{n} B(k,n,p) = 1$
- Mittelwert: $< k >= \sum_{k=0}^{n} k\ B(k,n,p) = np$
- Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\ B(k,n,p) - < k >^2 = np(1-p)$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
- Für z.B. $p(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ beim radioaktiven Zerfall

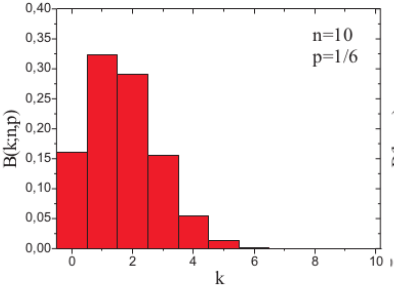
Diskrete Binomialverteilung

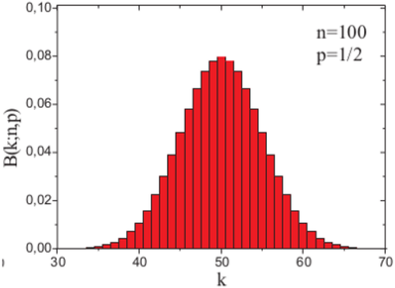
- $B(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$



Diskrete Binomialverteilung

- $B(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$





Diskrete Poissonverteilung

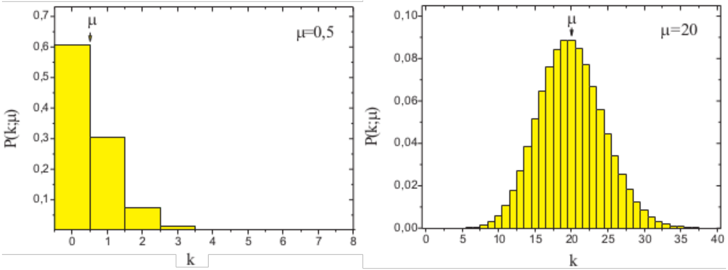
- Für $p \to 0$ und $n \to \infty$ erhalten wir die Poissonverteilung

Diskrete Poissonverteilung

- Für $p \to 0$ und $n \to \infty$ erhalten wir die Poissonverteilung
- $P(k, \mu) = \frac{\mu^k \exp(-\mu)}{k!}$
- Normierung: $\sum_{k=0}^{\infty} P(k, \mu) = 1$
- Mittelwert: $< k >= \sum_{k=0}^{\infty} k \ P(k, \mu) = \mu$
- Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \ P(k, \mu) - < k >^2 = \mu$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\mu}$
- Halbwertsbreite: $FWHM = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma \approx 2.3548\sigma$

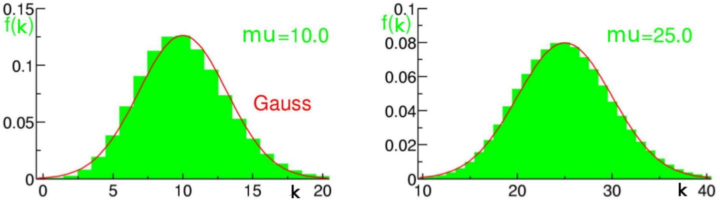
Diskrete Poissonverteilung

- $P(k,\mu) = \frac{\mu^k \exp(-\mu)}{k!}$



Fehler eines Bins ist $\sqrt{n}$. Aber unter Annahmen!

Poissonverteilung und der Fehler



stetige Gaußverteilung

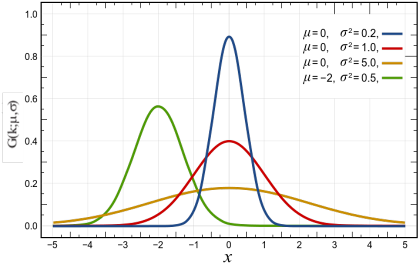
- Für $\mu > 30$ kann die Poissonverteilung mit einer Gaußverteilung gut angenähert werden

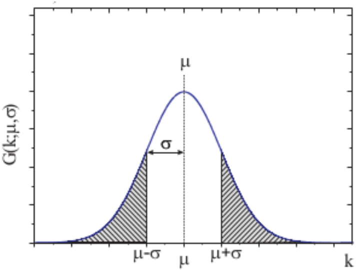
stetige Gaußverteilung

- Für $\mu > 30$ kann die Poissonverteilung mit einer Gaußverteilung gut angenähert werden
- $G(k,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}\right)$
- Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} G(k,\mu,\sigma)dk = 1$
- Mittelwert: $\int_{-\infty}^{\infty} k\ G(k,\mu,\sigma)dk = \mu$
- Varianz: $\int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k,\mu,\sigma)dk - < k >^2 = \sigma^2$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\mu}$

stetige Gaußverteilung

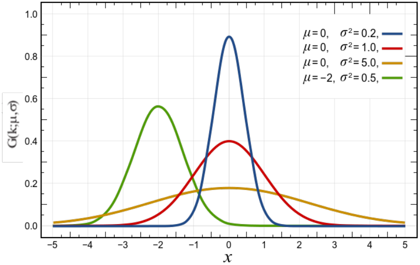
- $G(k,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left(-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}\right)$

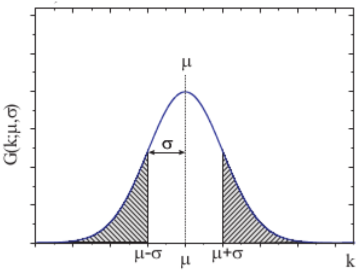




stetige Gaußverteilung

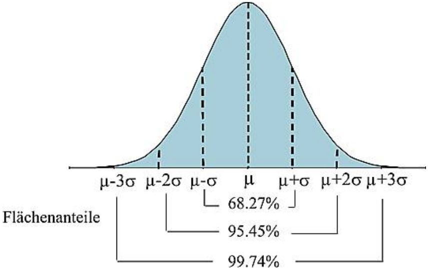
- $G(k, \mu, {\color{red}\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot{\color{red}\sigma}} \exp\left(-\frac{(\mu-k)^2}{2{\color{red}\sigma}^2}\right)$





Varianz Gaußverteilung

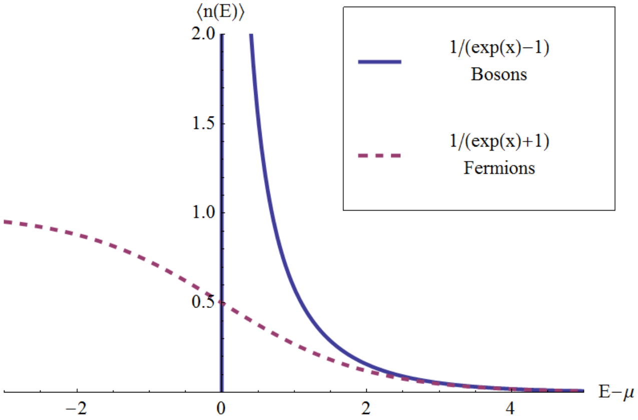
$$A = \int_I G(k, \mu, \sigma) dk$$



Intervall (I)	Wahrscheinlichkeit
$\mu \pm \sigma$	68.27%
$\mu \pm 2\sigma$	95.45%
$\mu \pm 3\sigma$	99.74%

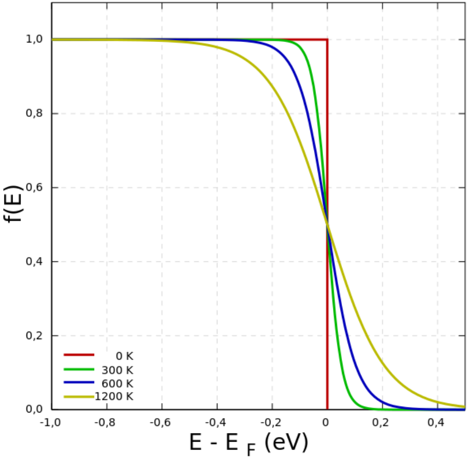
Wichtige Verteilungen

- Bose-Einstein-Statistik: $< n(E) > = \frac{1}{\exp(\beta(E-\mu))-1}$



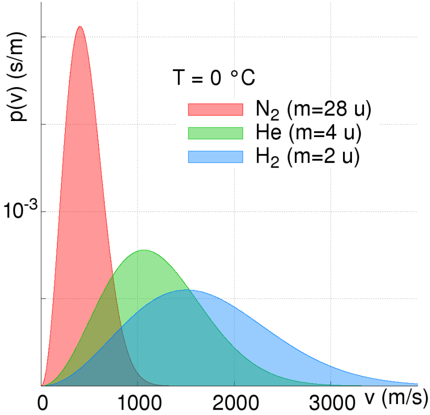
Wichtige Verteilungen

- Fermi-Dirac-Statistik: $W(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B \cdot T}\right)+1}$



Wichtige Verteilungen

- Maxwell-Boltzmann Verteilung:
$$p(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$



Inhalt

Binomial-, Poission- und Gauß-Verteilung

$$B(k,n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

```
double ROOT::Math::binomial_pdf (unsigned int k, double p, unsigned int n)
```

$$P(k,\mu) = \frac{\mu^k \exp(-\mu)}{k!}$$

```
double ROOT::Math::poisson_pdf  (unsigned int k, double mu)
```

$$G(k,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}\right)$$

```
double ROOT::Math::gaussian_pdf(double mu, double sigma, double k)
```

Poissonverteilung (Code)

```
#include <TMath.h>
#include <TRandom3.h>
#include <TH1D.h>
using namespace TMath;
void poisson()
{
  TRandom3 *R = new TRandom3(); //neues TRandomobjekt Instanzieren
  R->SetSeed(0); //nutze Systemuhr als Quelle
  double mu = 5.;
  TH1D *f1 = new TH1D("Poissonverteilung 1","",100,0,100); //Instanziere TH1D Objekt f1
  for(int i = 0; i < 10000; i++) {f1->Fill(R->Poisson(mu));}; //fuelle Histogramm mit poisson
  TCanvas *myC = new TCanvas ("myC","Draw My Function",0,0,800,600); //erstelle frame
  myC->Divide(2,2); //Teile frame in 4 Teile
  myC->cd(1); //Gehe zu frame 1
  f1->Draw(); //Zeichne objekt
  mu = 10.;
  TH1D *f2 = new TH1D("Poissonverteilung 2","",100,0,100); //Instanzieren TH1D Objekt f2
  for(int i = 0; i < 10000; i++) {f2->Fill(R->Poisson(mu));};
  myC->cd(2);
  f2->Draw();
  mu = 25.;
  TH1D *f3 = new TH1D("Poissonverteilung 3","",100,0,100); //Instanzieren TH1D Objekt f3
  for(int i = 0; i < 10000; i++) {f3->Fill(R->Poisson(mu));};
  myC->cd(3);
  f3->Draw();
  mu = 50.;
  TH1D *f4 = new TH1D("Poissonverteilung 4","",100,0,100); //Instanzieren TH1D Objekt f4
  for(int i = 0; i < 10000; i++) {f4->Fill(R->Poisson(mu));};
  myC->cd(4);
  f4->Draw();
}
```

Maxwell-Boltzmann Verteilung (Code)

$$p(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

```
#include <cmath>
#include <TMath.h>
#include <TF1.h>
using namespace TMath;
double maxwellfunc(double *x, double *p) //Erstelle Funktion fuer Gleichung
{
  double xx = x[0];
  double f = 4*Pi()*Power(Sqrt(p[0]/(2*Pi()*p[1]*p[2])),3)*xx*xx*Exp(-p[0]*xx*xx/(2*p[1]*p[2]));
  //Maxwell-Boltzmann Funktion
  return f; //Gebe f als Funktionsoutput aus
}
void myMaxwell() //eigentliches Programm
{
  double k_B = 8.6173303e-5;  //Boltzmann Kostante in eV/K
  //double k_B = 1.38064852e-23  //Boltzmann Konstante in J/K
  double m = 0.5109989461e-6; //Masse eines Elektron in eV/c^2
  double T = 300.; //Temperatur des Teilchensystems
  TF1 *f1 = new TF1("Maxwell-Boltzmann Verteilung",maxwellfunc,0.,1000.,3); //Instanziere TF1 Objekt
  f1->SetParameters(m,k_B,T); //Setze Parameter p[0],p[1],p[2] entsprechend
  f1->Draw(); // Zeichne TF1 Objekt
}
```

Quellenverzeichnis

- Wikipedia zu Binomial-, Poisson- und Gaußverteilung
- Grafiken zu Maxwell-Boltzmann Verteilung aus Wikipedia
- Buch: Steland - Basiswissen Statistik 2010
- PAP Praktikumsanleitung Universität Heidelberg
- Buch: Sigmnund Brandt - Datenanalyse für Naturwissenschaftler und Ingenieure
- `http://www.mathe-online.at/materialien/harald.krauss/files/binomial.htm`
- `http://elsenaju.info/Funktionen/Gauss-Plotter.htm`

ZUSATZ: Binomial zu Poisson (Herleitung)

$$
\begin{aligned}
W &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1-\frac{\lambda}{n}^n}{1-\frac{\lambda}{n}^k} \\
&= \frac{\lambda^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) 1-\frac{\lambda}{n}^n}{k! n^k 1-\frac{\lambda}{n}^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \\
&\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda} \qquad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{q}{n}) = 1 \\
\Rightarrow W &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

ZUSATZ: Poisson zu Gauß (Herleitung)

Nutze Stirling-Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, um Fakultäten zu approximieren.