Aufgabenblatt 4, Physik B, 29./30. Mai 2003

1. Schätzen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärfebeziehung die Mindestgeschwindigkeit v_{min} und die minimale kinetische Energie $E_{kin,min}$ ab, die ein Objekt haben muss, wenn es zwischen zwei Wänden im Abstand L eingesperrt wird.
   a) ein Tennisball, m = 60g, zwischen zwei Wänden im Abstand L = 10cm.
   b) ein Proton, $m = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$; $m_0 c^2 = 938 MeV$, zwischen zwei Gitterebenen eines Kristalls, L = 0.1 nm.
   c) ein Proton zwischen zwei Wänden im Abstand L = 2 fm (Größenordnung der Kernradien).
   Setzen Sie L als Ortsunschärfe an und die resultierende Impulsunschärfe als Mindestimpuls.
   $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} J \cdot s = 6.58 \cdot 10^{-16} eV \cdot s$.

   Lösung: $p_{min} = \hbar/L \implies v_{min} = \hbar/mL \implies E_{kin,min} = \hbar^2/(2mL^2)$
   a) $p_{min} = 1.05 \cdot 10^{-33} kg \cdot m \cdot s^{-1}$; $v_{min} = 1.75 \cdot 10^{-32}\, m/s$
   $E_{kin,min} = 9.2 \cdot 10^{-66} J = 5.7 \cdot 10^{-47} eV$ (mit dieser Geschwindigkeit schafft man in der Lebensdauer des Universums, ca. 10 Milliarden Jahre, den achtfachen Durchmesser eines Blei-Atom**kerns**)
   b) $p_{min} = 1.05 \cdot 10^{-24} kg \cdot m \cdot s^{-1}$; $v_{min} = 630\, m/s$
   $E_{kin,min} = 3.3 \cdot 10^{-22} J = 2.1\, meV$.
   c) $p_{min} = 5.25 \cdot 10^{-20} kg \cdot m \cdot s^{-1}$; $v_{min} = 3.14 \cdot 10^7\, m/s$
   $E_{kin,min} = 8.25 \cdot 10^{-13} J = 5.2\, MeV$.

2. An einem Beschleuniger werden π^--Mesonen mit einem Impuls $|\vec{p}| = 160\, GeV/c$ erzeugt. Die mittlere Lebensdauer der π^- im Ruhesystem ist $\tau_0 = 26.0\, ns$, ihre Ruheenergie ist $m_0 c^2 = 140\, MeV$.
   Wie weit fliegen die Pionen im Mittel im Laborsystem, bis sie zerfallen ?
   Welcher Bruchteil zerfällt auf den ersten 100 m ?
   Sie erinnern sich: nach einer Zeit t ist von den zur Zeit t=0 vorhandenen Pionen nur noch der Bruchteil $e^{-\frac{t}{\tau}}$ vorhanden, τ ist die mittlere Lebensdauer.

   Lösung: Aus Impuls und Ruhemasse erhalten wir für die Lorentz-Faktoren $\beta\gamma = pc/m_0 c^2 = 1140$. Dieser Wert ist sehr viel grösser als 1, sodass wir $\gamma = \beta\gamma$ setzen können, $\gamma^2 = \beta^2\gamma^2 + 1$. Damit erhalten wir für die Lebensdauer im Laborsystem $\tau_{LAB} = \gamma\tau_0 = 29.6\, \mu s$ und für die mittlere Zerfallslänge $d = \tau_{LAB} v = \tau_{LAB} c \beta\gamma = 8.9\, km$. β kann man hier natürlich als 1 ansetzen, genau ergibt sich $\beta = \sqrt{(\beta\gamma)^2/((\beta\gamma)^2 + 1)} = 0.99999961$.
   Nach den ersten 100m ist noch der Bruchteil

   $$e^{-\frac{100m}{8900m}} \approx 1 - \frac{100m}{8900m}$$

   vorhanden, also zerfällt der Bruchteil 1/89 = 1.1%. Wir haben hier die Reihenentwicklung $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + ...$ nach der ersten Ordnung abgebrochen, da x sehr klein ist.

3. In einem Experiment beobachten Sie, dass ein neutrales Teilchen in ein Proton und ein π^- zerfällt. Die Impulse der Tochterteilchen sind $\vec{p}_p = (3380,\, 100,\, 0)\, MeV/c$ und $\vec{p}_\pi = (620,\, -100,\, 0) MeV/c$.
   Berechnen Sie den Impuls $\vec{p}_X$, die Gesamtenergie E_X und die Ruhemasse m_X des Mutterteilchens.
   Beim Zerfall bleiben die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls des Systems erhalten !!

   Lösung: Der Gesamtimpuls ergibt sich aus der vektoriellen Addition der Einzelimpulse: $\vec{p}_X = (4000,\, 0,\, 0) MeV/c$.
   Die Gesamtenergie der Tochterteilchen erhalten wir jeweils aus der Gleichung $E^2 = m_0^2 c^4 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ zu $E_p = 3509.2\, MeV$ und $E_\pi = 643.4\, MeV$, also $E_X = 4152.6\, MeV$. Aus Gesamtenergie und Impuls können wir dann die Ruhemasse ausrechnen: $m_X c^2 = \sqrt{E_X^2 - p_X^2 - p_y^2 - p_z^2} = 1115\, MeV$, also $m_X = 1115\, MeV/c^2$.