

Aufgabenblatt 7, Physik A, 3./5. Dezember 2003

1. Erzwungene Schwingungen

Ein Oszillator schwingt mit der Amplitude $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ und wird von einer periodischen Kraft $F_x = F_0 \sin(\omega t + \phi)$ angetrieben.

a) Berechnen Sie die in einer Schwingungsperiode T auf den Oszillator übertragene Energie $E = \int_0^T P \cdot dt$. Hierbei ist $P(t) = F_x \cdot v_x$ die momentane Leistung.

b) Diskutieren Sie E als Funktion von ϕ . Für welches ϕ wird E maximal ?

Nützliche Formeln:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (\text{I})$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \quad (\text{Ia})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (\text{II})$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \quad (\text{IIa})$$

2. Auto in der Grube

Ihr Auto springt nicht an und steht zu allem Unglück in einer Mulde. Auch wenn die vereinigten Kräfte aller Passagiere nicht ausreichen, das Auto einfach aus der Mulde herauszuschieben, kann man es immer noch mit einem Trick versuchen: man gibt dem Auto periodisch einen Schubs, sodass es mit immer grösserer Amplitude vor- und zurückrollt.

Wie müssen Sie das Auto anstossen, um eine maximale Amplitude zu erzielen und es so vielleicht doch noch aus der Mulde zu schaukeln ?

Lösungen:

1.)

$$v(t) = \dot{x}(t) = x_0 \omega \cdot \cos(\omega t).$$

$$\text{also } P(t) = \omega F_0 x_0 \cdot \{ \cos(\phi) \cdot \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \sin(\phi) \cdot \cos^2(\omega t) \}.$$

Jetzt müssen wir $P(t)$ integrieren:

$\sin(\omega t) \cos(\omega t)$ integriert über eine Schwingungsperiode gibt Null, wenn Ihnen das nicht einleuchtet, benutzen Sie Formel (Ia).

$\cos^2(\omega t)$ integriert über eine Schwingungsperiode gibt $T/2$, benutzen Sie hier (IIa).

$$\text{Damit wird } E = \int_0^T P \cdot dt = T\omega/2 \cdot F_0 x_0 \sin(\phi) = \pi F_0 x_0 \sin(\phi),$$

und damit wird die Durchschnittsleistung

$$\langle P \rangle = E/T = (\omega/2) \cdot F_0 x_0 \sin(\phi).$$

Die meiste Leistung wird also bei $\phi = 90^\circ$ übertragen, dann haben $v(t)$ und $F_x(t)$ die Phasenverschiebung Null. Das gilt auch für grössere Dämpfung, wenn die Amplitudenresonanzfrequenz $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ merklich von der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Oszillators abweicht!

2.) Wir müssen das Auto immer in Fahrtrichtung und im Zeitpunkt der grössten Geschwindigkeit anstossen, also im Schwingungsmittelpunkt.

Ausprobieren !!